

สมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน More some properties of nano minimal and maximal open sets

สัจจรักษ์ ลาตสูงเนิน^{1*} และอาดุลย์ จงรักษ์²
Sajjarak Ladsungnern^{1*} and Ardoon Jongrak²

^{1*}หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏชัยภูมิ อำเภอเมืองชัยภูมิ จังหวัดชัยภูมิ 36000
²หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ อำเภอเมืองเพชรบูรณ์ จังหวัดเพชรบูรณ์ 67000
^{1*} Mathematics Program, Faculty of Education
Chaiyaphum Rajabhat University, Chaiyaphum 36000, Thailand
² Mathematics Program, Faculty of Science and Technology
Phetchabun Rajabhat University, Phetchabun 67000, Thailand
²Corresponding Author, E-mail : ardoon.jon@pcru.ac.th

Received: 16 September 2022, Revised: 15 October 2022, Accepted: 8 November 2022

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติเพิ่มเติมบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน และเซตเปิดใหญ่สุดนาโนตามแนวคิดของเลลลิส ธิวการ์, คาวิช, อีวานจีไลน์คริสตินาลิลลี (2021) ที่ได้แนะนำไว้ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนซึ่งรวมถึงศึกษาสมบัติต่างๆในปริภูมิไม่ต่อเนื่องนาโนด้วย

คำสำคัญ: ปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน เซตเปิดเล็กสุดนาโน เซตเปิดใหญ่สุดนาโน

Abstract

The purpose of this research was to study moresome properties of minimal nano open sets,minimal nano closed sets; maximal nano open sets and maximal nano closed sets in Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D.(2021) concepts in nano topological spaces. Also, we study some propertiesof them on nano disconnected space.

Keywords : Nano topological space , Minimal nano open sets, Maximal nano open sets, Minimal nano closed sets; Maximal nano closed sets

1. บทนำ

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์แขนงทอพอโลยี (Topology) จะพบว่าเรื่องเซตเปิดและเซตปิด (Open sets or closed sets) นับเป็นเซตที่มีบทบาทสำคัญต่อการพิจารณาศึกษาจึงทำให้นักคณิตศาสตร์สนใจเซตเปิดและเซตปิดในลักษณะต่าง ๆ เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและมีการนำเสนออย่างต่อเนื่อง โดยในปี ค.ศ. 2001 และ 2003 นาคาโอกะและโอดะ (Nakaoka and Oda, 2001a และ 2003b) ได้ศึกษาเซตเปิดเล็กสุด และเซตเปิดใหญ่สุด (minimal open sets and maximal open sets) ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีซึ่งเป็นเซตที่กำลังได้รับความสนใจในปัจจุบันและในปี ค.ศ. 2011 เบนแชลลี ไอทานากิ และวาไล (Benchalli, Ittanagi and Wali, 2011) ได้แนะนำปริภูมิใหม่จากเซตเปิดเล็กสุดอีกทั้งศึกษาฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเซตเปิดเล็กสุดด้วยซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 2017 มุกขจี (Mukharjee, 2017) เป็นคนเป็นพัฒนาและประยุกต์ เซตเปิดเล็กสุดด้วยการสร้างสัจพจน์การแยกและก่อนหน้านี้อีกในปี ค.ศ. 2013 เลลลิส ธิวการ์ และคาร์เมลริชาร์ด (Lellis Thivagar and Carmel Richard, 2013a) เป็นผู้นำเสนอเซตเปิดนาโน (Nano open sets) ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ซึ่งเป็นการศึกษาสมบัติพื้นฐานของเซตเปิดนาโนและบางฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องและในปี ค.ศ. 2021 เลลลิส ธิวการ์, คาวิช, อีวานจีไลน์คริสตินาลิลลี่ (Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D, 2021) ได้แนะนำและศึกษาเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนซึ่งรวมถึงความต่อเนื่องนาโนด้วย แต่ผู้วิจัยเห็นว่ายังมีสมบัติอื่นอีกที่น่าสนใจเกี่ยวกับเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้แนวคิดเลลลิส ธิวการ์และคณะมาเป็นพื้นฐานในการศึกษาสมบัติอื่นที่สำคัญต่อไปอีกในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

2. ความรู้พื้นฐาน

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอบทนิยามและทฤษฎีบทหรือผลลัพธ์ที่จำเป็นสำหรับการศึกษาในหัวข้อต่อไป ซึ่งจะเริ่มต้นด้วยทอพอโลยีนาโน (Nano topology) และเซตเปิดนาโน (Nano open sets)

บทนิยาม 2.1 (Lellis Thivagar and Carmel Richard, 2013a) ให้ U เป็นภพสัมพัทธ์ (Universe) ซึ่งเป็นเซตจำกัดที่ไม่ว่าง (non-empty finite set of object) และ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน U ซึ่งความสัมพันธ์นี้จะไม่ได้กำหนดไว้ให้เห็น (Indiscernibility Relation) และเรียกคู่อันดับ (U, R) ว่าปริภูมิการประมาณค่า (Approximation space) สำหรับ $X \subseteq U$, $\forall x \in U$, $R(x)$ แทน ชั้นสมมูลของ x ภายใต้ความสัมพันธ์สมมูล R

1. ค่าประมาณล่าง (Lower approximation) ของ X เทียบกับ R เขียนแทนด้วย $L_R(X)$

นิยามโดย
$$L_R(X) = \bigcup_{x \in U} \{x \mid R(x) \subseteq X\}$$

2. ค่าประมาณบน (Upper approximation) ของ X เทียบกับ R เขียนแทนด้วย $U_R(X)$

นิยามด้วย
$$U_R(X) = \bigcup_{x \in U} \{x \mid R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

3. บริเวณขอบ (boundary region) ของ X เทียบกับ R เขียนแทนด้วย $B_R(X)$

นิยามโดย $B_R(X) = U_R(X) - L_R(X)$ ให้ $\tau_R(X) = \{U, \phi, L_R(X), U_R(X), B_R(X)\}$ จะพบว่า $\tau_R(X)$ เป็นทอพอโลยีบน U เทียบกับ X ซึ่งเรียกว่าทอพอโลยีนาโนสำหรับ U เทียบกับ X และเรียก $(U, \tau_R(X))$ ว่าปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน (Nano topological space) สำหรับ A ที่เป็นสมาชิกใน $\tau_R(X)$ เราเรียกว่าเซตเปิดนาโนใน U และเราจะเรียกสมาชิกใน $[\tau_R(X)]^c$ ว่าเซตปิดนาโนใน U ต่อไปนี้ข้อความ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนเทียบกับ X เมื่อ $X \subseteq U$ จะเขียนสั้น ๆ ว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนเซตย่อยเปิดนาโนและเซตย่อยปิดนาโนทั้งหมดใน $(U, \tau_R(X))$ เขียนแทนด้วย $NO(U)$ และ $NC(U)$ ตามลำดับ

บทนิยาม 2.2 (Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard, 2013b) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

1. สำหรับ $W \subseteq U$ เราเรียก W ว่าย่านใกล้เคียงนาโน (Nanoneighbourhood) ของเซตย่อย A ใน U ถ้ามีเซตเปิดนาโน $G \subseteq U$ ที่ $A \subseteq G \subseteq W$ เมื่อ $A = \{x\}$ เรากล่าวว่า W เป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x และเซตของย่านใกล้เคียงนาโนของ x เขียนแทนด้วย $N\eta(x)$

2. สำหรับ $A \subseteq U$ และ $x \in X$ เราเรียก x ว่าจุดภายในนาโน (Nano Interior point) ของเซต A ถ้ามีเซตเปิดนาโน $G \subseteq U$ ที่บรรจุ x ซึ่ง $x \in G \subseteq A$ เขียนเซตของจุดภายในนาโนทั้งหมดของ A ด้วยสัญลักษณ์ $Nint(A)$ ดังนั้น $x \in Nint(A)$ แสดงว่า $A \in N\eta(x)$ นั่นคือ $Nint(A) = \{x \in U \mid A \in N\eta(x)\}$

3. สำหรับ $A \subseteq U$ ส่วนปิดคลุมนาโน (Nano closure) ของ A เขียนแทนด้วย $Ncl(A)$ หมายถึง $Ncl(A) = \{x \in U \mid W \cap A \neq \phi, \forall W \in N\eta(x)\}$

ข้อสังเกต 2.1 จากบทนิยาม 2.2 พบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $Nint(A)$ คือเซตเปิดนาโนที่ใหญ่ที่สุด (Largest) ที่เป็นเซตย่อยของ A
2. $Nint(A) = \cup \{G \subseteq X \mid G \in NO(U), G \subseteq A\}$
3. $Ncl(A)$ เป็นเซตปิดนาโนที่เล็กที่สุด (Smallest) ที่บรรจุ A
4. $Ncl(A) = \cap \{F \subseteq X \mid F \in NC(U), A \subseteq F\}$

บทนิยาม 2.3 (Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard, 2013a) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ $A \subseteq U$ จะกล่าวว่า A เป็นเซตพรีเปิดนาโน (Nano pre-open set) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq Nint(Ncl(A))$

บทนิยาม 2.4 (Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของ U

1. จะเรียก A ว่าเซตเปิดเล็กสุดนาโน (Minimal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่ถูกบรรจุใน A คือ ϕ หรือ A เท่านั้น เราเขียนแทนเซตของเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ด้วย $m_o(U)$

นั่นคือ $A \in m_o(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสำหรับทุก ๆ $H \in NO(U)$ ที่ $H \subseteq A$ จะได้ว่า $H = \phi$ หรือ $H = A$

2. จะเรียก A ว่าเซตเปิดใหญ่สุดนาโน (Maximal nano open set) ถ้าเซตเปิดนาโนที่บรรจุ A คือ U หรือ A เท่านั้น เซตของเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U เขียนแทนด้วย $M_o(U)$

นั่นคือ $A \in M_d O(U)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $G \in NO(U)$ ที่ $A \subseteq G$ จะได้ว่า $G=U$ หรือ $G=A$

ตัวอย่าง 2.1 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $U = \{p, q, r, s\}$ ซึ่ง $U_{/R} = \{\{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$ และ $X = \{p, r\} \subseteq U$ จะได้ว่า ทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\phi, \{p\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}, U\}$ ดังนั้นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U ได้แก่ $\{p\}, \{r, s\}$ และเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U คือ $\{p, r, s\}$

ทฤษฎีบท 2.1 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, B, C \subseteq U$ จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดนาโนแล้ว $A \cap B = \phi$ หรือ $A \subset B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
2. ถ้า A และ C เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้ว $A \cap C = \phi$ หรือ $A = C$

ทฤษฎีบท 2.2 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ A ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตเปิดนาโนใน U จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U
2. $A \subset Ncl(B)$ สำหรับแต่ละ $B \subset A$ ที่ $B \neq \phi$
3. $Ncl(A) = Ncl(B)$ สำหรับแต่ละ $B \subset A$ ที่ $B \neq \phi$

ทฤษฎีบท 2.3 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $G \subset A$ ซึ่ง G ไม่ใช่เซตว่างใน U ถ้ามีย่านใกล้เคียงนาโน W ของ G ซึ่ง W เป็นเซตเปิดนาโนใน U และ $W \subset Ncl(A)$ แล้ว $G \cup B$ เป็นเซตฟรีเปิดนาโน สำหรับทุก ๆ $B \subset A$ ซึ่ง B ไม่ใช่เซตว่าง

ทฤษฎีบท 2.4 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $G \subset U$ ซึ่ง G ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีย่านใกล้เคียงนาโน W ของ G ซึ่ง W เป็นเซตเปิดนาโนใน U และ $W \subset Ncl(G \cup A)$ แล้ว $G \cup B$ เป็นเซตฟรีเปิดนาโนสำหรับทุก ๆ $B \subset A$ ซึ่ง B ไม่ใช่เซตว่าง

ทฤษฎีบท 2.5 (Lellis Thivagar,M.,Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily,D, 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, B, C \subseteq U$ จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดนาโนแล้ว $A \cup B = U$ หรือ $B \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
2. ถ้า A และ C เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนซึ่ง $A \neq C$ แล้ว $A \cup C = U$

บทนิยาม 2.5 (พรรณราย พัวป้อง , 2563) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ $A \subseteq U$ จะกล่าวว่า A เป็นเซตหนาแน่นนาโน (nano dense set) ใน U ก็ต่อเมื่อ $Ncl(A) = U$

ตัวอย่าง 2.2 (พรรณราย พัวป้อง, 2563) ให้ $U = \{a, b, c, d\}$ ซึ่ง $U_{/R} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ และ $X = \{a, d\} \subseteq U$ ซึ่งจะได้ว่าทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, U\}$ และถ้ากำหนด $A = \{a, b, c\}$ แล้ว $Ncl(A) = U$ ดังนั้น A เป็นเซตหนาแน่นนาโน

บทนิยาม 2.6 (Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D., 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ $F \subset U$ และเป็นเซตปิดนาโน

1. จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน (Nano maximal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใด ๆ ที่บรรจุ F คือ U หรือ F นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $F \subseteq E$ แล้ว $E = U$ หรือ $E = F$
2. จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน (Nano minimal closed set) ก็ต่อเมื่อ เซตปิดนาโนใด ๆ ที่ถูกบรรจุใน F คือ F หรือ $\emptyset$ นั่นคือ ถ้า E เป็นเซตปิดนาโนซึ่ง $E \subseteq F$ แล้ว $F = E$ หรือ $E = \emptyset$

ทฤษฎีบท 2.6 (Lellis Thivagar, M., Kavith, J., and Evangeline Kristina Lily, D., 2021) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดเล็กสุดนาโน B เป็นเซตเปิดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $B \subset A \subset F$
2. $A \subset B$ และ $A \cap F = \emptyset$
3. $A \cup B = U$ และ $A \subset F$
4. $A \cup B = U$ และ $A \cap F = \emptyset$

บทนิยาม 2.7 (กฤษดา ศรีวิชา, 2563.) ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $X \subseteq A \subseteq U$ $\tau_R^A(X) = \{G \cap A \mid G \in \tau_R(X)\}$ เป็นทอพอโลยีนาโนสำหรับ A และเรียก $(A, \tau_R^A(X))$ เป็นปริภูมิย่อย (Sub space) ของ $(U, \tau_R(X))$

3. ผลการศึกษา

3.1 สมบัติของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและใหญ่สุดนาโน

ในหัวข้อต่อไปนี้จะศึกษาถึงสมบัติบางประการของเซตเปิดเล็กสุดนาโนและเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนนาโนใน U จะได้ว่า

1. ถ้า x เป็นสมาชิกใน A แล้ว $A \subset W$ สำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$
2. $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ สำหรับแต่ละ $x \in A$

การพิสูจน์ 1 ให้ $x \in A$ และ $W \in N\eta(x)$ ที่ $W \in NO(U)$ ทำให้ $W \cap A \neq \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 2.1 จึงได้ว่า $A \subset W$ 2 ให้ $x \in A$ และ $W \in N\eta(x)$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดนาโนใน U ที่บรรจุ x ทำให้ $A \in N\eta(x)$ เป็นผลทำให้ $\cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\} \subset A$ โดยข้อ 1 ได้ว่า $A \subset \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$

ดังนั้น $A = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ $x \in U - A$ ถ้า W เป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x และ W เป็นเซตเปิดนาโนใน U แล้ว $W \cap A = \phi$ หรือ $A \subset W$

การพิสูจน์ เนื่องจาก W เป็นเซตเปิดนาโนและ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนโดยทฤษฎีบท 3.1.1 ทำให้ได้ว่า $W \cap A = \phi$ หรือ $A \subset W$ $\square$

บทแทรก 3.1.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U

และ $x \in U - A$ ถ้า $A_x = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$ แล้ว $A_x \cap A = \phi$ หรือ $A \subset A_x$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน และ $x \in U - A$ และให้ W เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x โดยทฤษฎีบท 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $W \cap A = \phi$ หรือ $A \subset W$ ถ้า $A \subset W$ สำหรับทุก ๆ W ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x แล้วทำให้ได้ว่า $A \subset A_x = \cap \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U)\}$

ถ้า $W \cap A = \phi$ สำหรับทุก ๆ W ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x แล้วทำให้มี W^* ที่เป็นย่านใกล้เคียงเปิดนาโนของ x ที่ $W^* \cap A = \phi$ ดังนั้น $U_x \cap A = \phi$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ $A, W \subseteq U$ จะได้ว่าถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $x \in A$ แล้วสำหรับแต่ละย่านใกล้เคียงเปิดนาโน W ของ x จะได้ว่า $W \cup A = U$ หรือ $W \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.1 จึงเป็นผลทำให้ $W \cup A = U$ หรือ $W \subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง $A \neq B$ ถ้า $A \cap B \subset C$ แล้ว $A = C$ หรือ $B = C$

การพิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 2.5

ทฤษฎีบท 3.1.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ถ้าแต่ละเซตแตกต่างกันทั้งหมด (นั่นคือ $A \neq B \neq C \neq A$) แล้ว $A \cap B \not\subset A \cap C$

การพิสูจน์ สมมติว่า $A \cap B \subset A \cap C$ ดังนั้น $(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

เป็นผลทำให้ $B \cap (A \cup C) \subset (A \cup B) \cap C$ เนื่องจาก A, B และ C เซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $A \neq B \neq C \neq A$ โดยทฤษฎีบท 2.5(2) จึงได้ว่า $A \cup C = U = A \cup B$

ทำให้ได้ว่า $B = B \cap U = B \cap (A \cup C) \subset (A \cup B) \cap C = U \cap C = C$ แต่ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน จึงได้ว่า $B = C$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน $B \neq C$ ดังนั้น $A \cap B \not\subset A \cap C$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.6 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U

และ x เป็นสมาชิกใน B แล้ว $B = \cup \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

การพิสูจน์ เนื่องจาก B เป็นเซตเปิดนาโนและเป็นย่านใกล้เคียงนาโนของ x

จึงได้ว่า $B \subset \cup \{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\}$

โดยทฤษฎีบท 3.1.3 ทำให้ได้ว่า $\cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\} \subset B$

ดังนั้น $B = \cup\{W \mid W \in N\eta(x), W \in NO(U), W \cup B \neq U\} \quad \square$

ทฤษฎีบท 3.1.7 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ x เป็นสมาชิกใน $U-A$ แล้ว $U-A \subset W$ สำหรับทุก ๆ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

การพิสูจน์ ให้ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ เนื่องจาก $x \in U-A$ ทำให้ $W \not\subset A$ โดยทฤษฎีบท 2.5

(1) ทำให้ได้ว่า $W \cup A = U$ เป็นผลทำให้ $W^c \cap A^c = (W \cup A)^c = U^c = \phi$ ดังนั้น $U-A \subset W \quad \square$

บทแทรก 3.1.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับแต่ละ $x \in U-A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า $A=W$
2. มี $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U-A \subset W$ และ $W \not\subset U$

การพิสูจน์ สมมติว่าข้อ 1 ไม่จริง นั่นคือมี $x \in U-A$ และมี $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ ซึ่ง $A \not\subset W$

โดยทฤษฎีบท 3.1.7 ทำให้ได้ว่า $U-A \subset W \quad \square$

บทแทรก 3.1.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับแต่ละ $x \in U-A$ และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า $U-A \not\subset W$
2. มี $W \in NO(U)$ ที่ทำให้ $U-A=W \neq U$

การพิสูจน์ สมมติว่าข้อ 2 ไม่จริง นั่นคือสำหรับทุก ๆ $W \in NO(U)$ ซึ่งได้ว่า $U-A \neq W$ หรือ $W \subset U$

โดยทฤษฎีบท 3.1.7 ทำให้ได้ว่า $U-A \subset W$ สำหรับแต่ละ $x \in U-A$

และสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$ จะได้ว่า $U-A \not\subset W \quad \square$

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้ว $Ncl(A) = U$ หรือ $Ncl(A) = A$

การพิสูจน์ เป็นจริงตามบทแทรก 3.1.3 $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.9 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้ว $Nint(U-A) = U-A$ หรือ $Nint(U-A) = \phi$

การพิสูจน์ เป็นจริงตามบทแทรก 3.1.3 $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.10 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U-A$ แล้ว $Ncl(B) = U-A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $\phi \neq B \subset U-A$

ทำให้ได้ว่า $Ncl(B) \subset Ncl(U-A) = U-A$ ต่อไปจะแสดงว่า $U-A \subset Ncl(B)$

ให้ $x \in (U-A)$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U

โดยทฤษฎีบท 3.1.7 จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $W \in N\eta(x)$ และ $W \in NO(U)$

ทำให้ $U - A \subset W$ เป็นผลทำให้ $\phi \neq B = B \cap B \subset (U - A) \cap B \subset W \cap B$

จึงได้ว่า $W \cap B \neq \phi$ ดังนั้น $x \in Ncl(B)$ เป็นผลทำให้ $U - A \subset Ncl(B)$ ดังนั้น $Ncl(B) = U - A$ $\square$

บทแทรก 3.1.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ M เป็นเซตย่อยของ U ซึ่ง $A \subset M$, $A \neq M$ แล้ว $Ncl(M) = U$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $A \subset M \subset U$

ทำให้ได้ว่า $Ncl(M) \subset Ncl(U) = U$ ต่อไปจะแสดงว่า $U \subset Ncl(M)$

เพราะว่า $A \subset M \subset U$ และ $A \neq M$ ดังนั้นมี $B \subset U - A$, $B \neq \phi$ ซึ่ง $M = A \cup B$

โดยทฤษฎีบท 3.1.10 จะได้ว่า $U - A \subset Ncl(B)$

พิจารณา $U = A \cup (U - A) \subset Ncl(A) \cup Ncl(B) = Ncl(A \cup B) = Ncl(M)$ ดังนั้น $Ncl(M) = U$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.11 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $U - A$ มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัวแล้ว $Ncl(U - \{a\}) = U$ สำหรับ $a \in (U - A)$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และเนื่องจาก $\{a\} \subset U - A$

ทำให้ได้ว่า $A \subset U - \{a\}$ และ $A \neq U - \{a\}$ โดยบทแทรก 3.1.4 จึงได้ว่า $Ncl(U - \{a\}) = U$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.12 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยแท้ของ U ที่ $A \subset B$ แล้ว $Nint(B) = A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U กรณีที่ $B = A$ ทำให้ได้ว่า $Nint(B) = Nint(A) = A$

กรณีที่ $B \neq A$ เพราะ $A \subset B$ ทำให้ได้ว่า $A = Nint(A) \subset Nint(B)$

แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $Nint(B)$ เป็นเซตเปิดนาโน ทำให้ $Nint(B) \subset A$

ดังนั้น $Nint(B) = A$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.13 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $U - A$ แล้ว $U - Ncl(B) = Nint(U - B) = A$

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U โดยทฤษฎีบท 3.1.10 ได้ว่า $Ncl(B) = U - A$ เป็นผลทำ

ให้ $U - Ncl(B) = A$ เนื่องจาก $A \subset U - B \subset U$ โดยทฤษฎีบท 3.1.12 ได้ว่า $Nint(U - B) = A$

ดังนั้น $U - Ncl(B) = Nint(U - B) = A$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.14 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยของ U ที่ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตพรีเปิดนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตย่อยของ U พิจารณาเป็นสองกรณีดังนี้
กรณีที่ 1 ถ้า $B = A$ ทำให้ B เป็นเซตเปิดนาโน เป็นผลทำให้ $B = Nint(B) \subset Nint(Ncl(B))$ ดังนั้น B เป็นเซตพรีเปิดนาโน

กรณีที่ 2 ถ้า $B \neq A$, $A \subset B$ โดยบทแทรก 3.1.4 ได้ว่า $Ncl(B) = U$ เป็นผลทำให้

$Nint(Ncl(B)) = Nint(U) = U \supset B$ ดังนั้น B เป็นเซตพรีเปิดนาโน $\square$

บทแทรก 3.1.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $a \in (U - A)$ แล้ว $U - \{a\}$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ $a \in (U - A)$ ได้ว่า $\{a\} \subset (U - A)$ เป็นผลทำให้ได้ว่า $A \subset (U - \{a\})$ โดยทฤษฎีบท 3.1.14 ทำให้ได้ว่า $U - \{a\}$ เป็นเซตพรีเปิดนาโน $\square$

ทฤษฎีบท 3.1.15 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และ A, B เป็นเซตย่อยของ U ถ้า $A \cup B = U$, $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโนและ A เป็นเซตเปิดนาโนแล้ว B เป็นเซตปิดนาโน

การพิสูจน์ เนื่องจาก $A \cup B = U$ จึงได้ว่า $(U - A) \cap (U - B) = \phi$ เป็นผลทำให้ $(U - A) \subset B$ พิจารณา $(A \cap B) \cup (U - A) = (A \cup (U - A)) \cap (B \cup (U - A)) = B \cup (U - A) = B$ เนื่องจาก $A \cap B$ และ $U - A$ เป็นเซตปิดนาโนใน U ดังนั้น B เป็นเซตปิดนาโน $\square$

3.2 ปริภูมิไม่เชื่อมโยง

หัวข้อนี้เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดใหญ่สุดนาโน และเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิไม่เชื่อมโยง ดังนี้

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน จะกล่าวว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน (Nano disconnected space) ก็ต่อเมื่อ มีเซตเปิดนาโน G, H ซึ่งต่างก็ไม่ใช่เซตว่างที่ $G \cap H = \phi$ และ $G \cup H = U$ และเราจะกล่าวว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงนาโน (Nano connected space) ก็ต่อเมื่อ $(U, \tau_R(X))$ ไม่เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน นั่นคือไม่มีเซตเปิดนาโน G, H ซึ่งต่างก็ไม่ใช่เซตว่างที่ $G \cap H = \phi$ และ $G \cup H = U$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ให้ $U = \{a, b, c, d\}$ ซึ่ง $U_R = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ และ $X = \{a, d\} \subseteq U$ จะได้ว่าทอพอโลยีนาโน $\tau_R(X) = \{\phi, \{a\}, \{b, c, d\}, U\}$ และเซตย่อยแท้ที่ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตเปิดนาโนใน U ได้แก่ $\{a\}, \{b, c, d\}$ โดยที่ $\{a\} \cup \{b, c, d\} = U$ และ $\{a\} \cap \{b, c, d\} = \phi$ ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset B$ หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ B เป็นเซตเปิดนาโนโดยทฤษฎีบท 2.5 (1) ได้ว่า $A \cup B = U$ หรือ $B \subset A$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และ B เป็นเซตเปิดนาโนโดยทฤษฎีบท 2.1 (1) ได้ว่า $A \cap B = \phi$ หรือ $B \subset A$ พิจารณากรณีที่ $A \cup B = U, B \subset A$ ทำให้ได้ว่า $A \subset A \cup B = U$ และ $U = A \cup B \subset A \cup A = A$ เป็นผลทำให้ $A = U$ กรณีที่ $A \cap B = \phi, B \subset A$ จึงได้ว่า $B = A \cap B \subset A \cap A = A$ และ $\phi = A \cap B$ เป็นผลทำให้ $B = \phi$ ดังนั้น $A \cup B = U, A \cap B = \phi$ และ $B \subset A$ นั่นคือถ้า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ สรุปได้ว่า $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

ข้อสังเกตจากทฤษฎีบท 3.2.1 พบว่า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ แล้วทำให้ $A = U - B$ ดังนั้นในทฤษฎีบทนี้ ถ้า $B \not\subset A$ แล้ว A และ B ทั้งคู่ต่างก็เป็นเซตปิดนาโนซึ่งเป็นผลให้ทฤษฎีบทดังกล่าวสมมูลกับข้อความ “ถ้า A เป็นเซตเปิดสุดใหญ่นาโนและ B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว $A \subset B$ หรือ $A = U - B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง”

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า U มีเซตย่อยที่เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้วเซตดังกล่าวเป็นเซตเปิดนาโนไม่ซัด (nontrivial nano open set) หรือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโนอย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ ให้ A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน U และให้ B เป็นเซตปิดนาโนใน U ทำให้ได้ว่า $A \subset A \cup B$ เพราะว่า A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนจึงพิจารณาได้ 2 กรณีต่อไปนี้คือ กรณีที่ 1 $A = A \cup B$ ทำให้ $B \subset A$ แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนเป็นผลทำให้ $B = \phi$ หรือ $B = A$

กรณีที่ 2 $A \cup B = U$ แต่เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน โดยทฤษฎีบท 2.1 (1) ได้ว่า $A \cap B = \phi$ หรือ $A \subset B$ แต่ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและ $A \subset B$ จึงได้ว่า $A = B$ หรือ $B = U$ จากทั้งสองกรณีทำให้ได้ว่า $A = B$ หรือ $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$

จึงสรุป ว่า ถ้า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

บทแทรก 3.2.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $A = U - F$ หรือ $A = F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโน และ F เป็นเซตปิดนาโน ทำให้ได้ว่า $U - F$ เป็นเซตเปิดนาโน ด้วยกระบวนการพิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 3.2.2 ได้ว่า $A = U - F$ หรือ $A \cup (U - F) = U$ และ $A \cap (U - F) = \phi$

ได้ว่า $A \cup (U - F) = U$ และ $A \cap (U - F) = \phi$ เป็นผลทำให้ $A = F$ $\square$

บทแทรก 3.2.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว A เป็นเซตย่อยแท้เปิดนาโนหรือเซตย่อยแท้เปิดนาโนมีเพียง A และ $U - A$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ ให้ B เป็นเซตย่อยแท้เปิดนาโน เช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.2 ได้ว่า

$A = B$ หรือ $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ ได้ว่า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \phi$ เป็นผลทำให้ $B = U - A$

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A และ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง $A \neq B$ และ $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

การพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน ทำให้ได้ว่า $A \cup B = U$

จากสมมติฐาน $A \cap B$ เป็นเซตปิดนาโนถ้า $A \cap B = \phi$ ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

ถ้า $A \cap B \neq \phi$ เนื่องจาก $A - (A \cap B)$ และ $B - (A \cap B)$ เป็นเซตเปิดนาโนทั้งคู่

เราเลือก $G = A - (A \cap B)$ และ $H = B$ หรือเลือก $H = B - (A \cap B)$ และ $G = A$

จะได้ว่า $G \cup H = U$ และ $G \cap H = \phi$ นั่นคือ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้ามีเซตย่อย A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนใน U ซึ่ง A ไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโน แล้ว $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน

การพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโนเนื่องจากไม่เป็นเซตหนาแน่นนาโนใน U จึงทำให้ $Ncl(A) \neq U$ โดยทฤษฎีบท 3.1.11 ทำให้ได้ว่า $A = Ncl(A)$

เราเลือก $G = A$ และ $H = U - Ncl(A)$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตเปิดนาโนใน U

ที่ทำให้ $G \cup H = U$ และ $G \cap H = \phi$

ดังนั้น $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงนาโน $\square$

3.3 เซตปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดเล็กสุดนาโน

ต่อไปนี้เป็น การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตปิดใหญ่สุดนาโน และเซตปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน

ข้อสังเกตจากบทนิยาม 2.6 ทำให้ได้หลักภาวะคู่กัน (Duality Principle) สำหรับสับเซต F ในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน $(U, \tau_R(X))$ ได้แก่

1. F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน ก็ต่อเมื่อ $U - F$ เป็นเซตเปิดใหญ่สุดนาโน
2. F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโน ก็ต่อเมื่อ $U - F$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโน

บทตั้ง 3.3.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนและ $E, F \subseteq U$ ซึ่งต่างก็เป็นเซตปิดนาโน จะได้ว่า

1. ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนและ E เป็นเซตปิดนาโนแล้ว $F \cup E = U$ หรือ $E \subset F$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
2. ถ้า F เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโนและ E เป็นเซตปิดนาโนแล้ว $F \cap E = \phi$ หรือ $F \subset E$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยหลักภาวะคู่กันและการพิสูจน์ทำนองเช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.1(1)และทฤษฎีบท2.5(1) $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U และ E เป็นเซตปิดเล็กสุดนาโน แล้ว $E \subset F$ หรือ $F \cup E = U, F \cap E = \phi$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.1 $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน และมีสับเซต F ซึ่งเป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนใน U จะได้ว่า

1. F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนเพียงเซตเดียว
2. ถ้า E เป็นเซตย่อยแท้และเป็นเซตปิดนาโนใน U แล้ว $F \cup E = U$ และ $F \cap E = \phi$

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.2 $\square$

บทแทรก 3.3.1 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดนาโนและเล็กสุดนาโนใน U และ G เป็นเซตเปิดนาโน แล้ว $F = U - G$ หรือ $F = G$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 3.2.1 $\square$

บทแทรก 3.3.2 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า F เป็นทั้งเซตปิดใหญ่สุดและเล็กสุดนาโนใน U แล้วข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. F เป็นเซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนเพียงเซตเดียวหรือ
2. เซตย่อยแท้ที่เป็นเซตปิดนาโนใน U คือ F และ $U-F$ เท่านั้น

การพิสูจน์ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 3.2.2 $\square$

บทแทรก 3.3.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดและเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U แล้ว เซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนใน U คือ A และ $U-A$ เท่านั้น

การพิสูจน์ ให้ F เซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนใน U

โดยทฤษฎีบท 2.6 เมื่อเลือก $B=F$ จะได้ว่า $A=F$ หรือ $A=U-F$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.3 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดใหญ่สุดและเซตปิดเล็กสุดนาโนใน U และ F เป็นเซตทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนแล้ว $F \subset A$ หรือ $A \cap F = U$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.6 $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดและเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้วเซตเปิดนาโนและ F เป็นเซตปิดนาโนใน U แล้วข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $F \subset A \subset B$
2. $A \subset B$ และ $A \cup F = U$
3. $A \cap B = \emptyset$ และ $F \subset A$
4. $A \cup F = U$ และ $A \cap B = \emptyset$

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.6 $\square$

บทแทรก 3.3.4 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน ถ้า A เป็นทั้งเซตเปิดเล็กสุดและเซตปิดใหญ่สุดนาโนใน U แล้วเซตย่อยแท้ที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดนาโนคือ A และ $U-A$ เท่านั้น

การพิสูจน์ พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับบทแทรก 3.3.3 $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.5 ให้ $(U, \tau_R(X))$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโน A และ B เป็นเซตเปิดนาโนใน U ซึ่ง $A \cap B \neq \emptyset$ และ $A \cap B \neq A$ ถ้า B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$

การพิสูจน์ สมมติว่า $A \cap B$ ไม่เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$ ดังนั้นมีเซตเปิดเล็กสุดนาโน $H \neq \emptyset$ ในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$ ซึ่ง $H \subset A \cap B$ เนื่องจาก B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน $(U, \tau_R(X))$ และ $A \cap B \neq \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 2.1 (1) ได้ว่า $B \subset A$ เป็นผลทำให้ $A \cap B = B$

เพราะว่า A เป็นเซตเปิดนาโนใน U ทำให้ H เป็นเซตเปิดนาโนใน U ที่ $\phi \neq H \subset B$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน B เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนใน $(U, \tau_R(X))$ ดังนั้น $A \cap B$ เป็นเซตเปิดเล็กสุดนาโนในปริภูมิย่อย $(A, \tau_R^A(X))$ $\square$

4.บทสรุป

จากการที่ผู้วิจัยได้ศึกษาสมบัติเกี่ยวกับเซตเปิดเล็กสุดนาโนเซตปิดเล็กสุดนาโนเซตเปิดใหญ่สุดนาโนและเซตปิดใหญ่สุดนาโนบนปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนตามแนวคิดของเลลลิส ธิวการ์และคณะที่ได้แนะนำไว้ก่อนแล้วนั้นทำให้ผู้วิจัยได้สมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญของแต่ละเซตเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนที่มากพอและต่างจากที่เลลลิส ธิวการ์, คาวิช, อีวานจีไลน์คริสตินาลิลลี่ (2021) ที่ได้นำมาไว้ โดยรวมถึงสมบัติที่เกี่ยวข้องในปริภูมิเชิงทอพอโลยีนาโนไม่ต่อเนื่องด้วย จึงเป็นไปตามที่ผู้วิจัยต้องการศึกษาในครั้งนี้ ในอนาคตผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเซตปิดเล็กสุดน้อยทั่วไป (Nano Generalized Minimal Closed Sets) บนปริภูมิเชิงทอพอโลยีน้อยทั่วไป (Generalized Topological Spaces)

5. เอกสารอ้างอิง

- กฤษดา ศรีวิชา. (2563). *ปริภูมิย่อยในปริภูมินาโนทอพอโลยี*. เพชรบูรณ์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
พรรณราย พัวบ้อง. (2563). *เซตหนาแน่นแบบนาโน*. เพชรบูรณ์ : มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์.
Benchalli, S.S., Ittanagi, M., and Wali, R. S. (2011). On minimal open sets and maps in topological spaces. *Journal of computer and mathematical sciences*. 2(2) :170-398.
Lellis Thivagar, M., and Carmel Richard. (2013a). On nano continuity. *Mathematical theory and modeling*. 3(7) :32-37.
_____. (2013b). On nano forms of weakly open sets. *International journal of mathematics and statistics invention*. 1(1) :32-37.
Lellis Thivagar, M., Kavitha, J., and Evangeline Kristina Lily, D. (2021). Minimal and Maximal Open Sets in Nano Topological Space. *Advances Mathematics : Scientific Journal*. 10(6) :2675-2686.
Mukharjee, A. (2017). More on maximal, minimal open and closed sets. *Communications of the Korean Mathematical Society*. 32(1) : 175-181.
Nakaoka, F. and Oda, N. (2001a). Some applications of minimal open sets. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 27(8) : 471-476.
_____. (2003b). Some properties of maximal open sets. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2003(21) : 1331-1340.