

ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*

THE NATURE OF LOWER SECONDARY STUDENTS'

PROOF COMPREHENSION IN GEOMETRY

จักรพงษ์ ตรียุทธ์*, สุกัญญา หะยีสลาและ, ขวัญ เพียซ้าย, เอนก จันทจรูญ

Jakkapong Triyut*, Sukanya Hajisalah, Khawn Piasai, Anek Janjaroon

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร ประเทศไทย

Faculty of Science, Srinakharinwirot University, Bangkok, Thailand

*Corresponding author E-mail: jakkapong.jkt@g.swu.ac.th

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งเป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ โดยกรอบแนวคิดอยู่บนพื้นฐานของรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต กลุ่มผู้ให้ข้อมูลสำคัญเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผ่านการเรียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง จำนวน 6 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และ 2) แนวคำถามการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน เก็บรวบรวมข้อมูลด้วยการให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์และตอบคำถามเพื่อสะท้อนความเข้าใจ จากนั้นดำเนินการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหาพร้อมกับวิเคราะห์บทสัมภาษณ์ด้วยโปรแกรม ATLAS.ti ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจความหมายคำศัพท์ สัญลักษณ์ รูปที่ประกอบการพิสูจน์ และข้อความพิสูจน์ สามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความได้ ระบุนิยามที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ และระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์ ซึ่งมีนักเรียนเพียงบางส่วนที่สามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ และให้แนวคิดหลักของบทพิสูจน์ได้ นักเรียนบางส่วนพิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์เพื่อตัดสินความถูกต้องของการพิสูจน์ และมีบางส่วนเชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้องโดยปราศจากการตรวจสอบ แต่ส่วนใหญ่ยังมีปัญหาในการประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านไปพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้น ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสะท้อนว่านักเรียนความเข้าใจพื้นฐานที่ชัดเจน แต่ยังขาดความเข้าใจแบบองค์รวมและไม่สามารถประยุกต์แนวคิดไปสู่สถานการณ์ที่ซับซ้อนกว่า

คำสำคัญ: ความเข้าใจการพิสูจน์, การพิสูจน์ทางเรขาคณิต, ธรรมชาติของความเข้าใจ

Abstract

This study investigates the nature of lower secondary school students' proof comprehension in geometry. This qualitative inquiry was grounded in a theoretical model of reading comprehension in geometry proofs. The participants were six Grade 9 students who had previously studied geometric proofs, selected through purposive sampling. The research instruments consisted of: 1) Task: geometry proof comprehension, and 2) Task-based interview questions. Data were collected by asking participants to read a given proof and respond to questions to assess their comprehension, followed by task-based interviews. Data analysis was conducted using content analysis alongside transcript coding via the ATLAS.ti program. The findings revealed that most could understand the meaning of terms, symbols, figures, and proof statements. They could identify the logical status of statements, the applied properties, and the logical relationships among those statements. However, only a few participants successfully identified key premises, recognized necessary conditions for concluding, and summarized the main ideas of the proof. A subset of participants evaluated the reasonableness of the proof's details to determine its correctness, while others accepted the proof as correct without verification. Most participants struggled to apply the ideas gained from reading to constructing more complex proofs. Therefore, the nature of students' proof comprehension in geometry reflects a clear understanding of fundamental concepts, but a lack of holistic understanding and an inability to apply those concepts to more complex situations.

Keywords: Proof Comprehension, Geometry Proof, Nature of Comprehension

บทนำ

การพิสูจน์มีบทบาทสำคัญในคณิตศาสตร์ในฐานะเครื่องมือยืนยันความถูกต้องของข้อเสนอ ตลอดจนใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ การพิสูจน์เปรียบดัง “จิตวิญญาณของคณิตศาสตร์” (Stylianou, D. A. et al., 2009) ที่หล่อหลอมกระบวนการคิดอย่างมีเหตุผล แม้ในอดีตการพิสูจน์เป็นเพียงการบ้านวิชาเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสามารถพิเศษ แต่ในปัจจุบันแนวโน้มทางการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติ เช่น สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของประเทศสหรัฐอเมริกาได้เสนอให้สอนการพิสูจน์ในทุกระดับชั้น (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) และควรให้เริ่มเรียนตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (Komatsu, K., 2017) ซึ่งสอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของประเทศไทย ที่กำหนดให้มีการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นครั้งแรกในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่องความเท่ากันทุกประการ

อย่างไรก็ตาม การจัดการเรียนรู้และการประเมินผลการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในบริบทของโรงเรียนในประเทศไทยในปัจจุบันยังขาดความสอดคล้องกับเป้าหมายของหลักสูตร กล่าวคือ หนังสือเรียนยังคงเน้นการหาค่ามากกว่าการอธิบายเหตุผล การพิสูจน์ปรากฏในรูปแบบสำเร็จรูป เช่น การพิสูจน์แบบสองคอลัมน์ การเรียนการสอนยังคงเน้น

การสาธิตตัวอย่างการพิสูจน์บนกระดานโดยครู นักเรียนมักได้รับการสอนให้จดจำรูปแบบการเขียน มากกว่าการทำความเข้าใจความหมายที่อยู่เบื้องหลังข้อความในบทพิสูจน์ การประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ส่วนใหญ่จะตั้งคำถามว่า “จงพิสูจน์ทฤษฎีบท” หรือ “จงบอกและพิสูจน์ทฤษฎีบท” หรือให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อน (Conradie, J. & Frith, J., 2000); (Inam, B. et al., 2018) โดยการให้ทำซ้ำหรือแก้ไขเพียงเล็กน้อยเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกัน ผลที่ตามมา คือ นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความซ้ำได้อย่างสมบูรณ์แบบ ซึ่งบ่งชี้ได้เพียงความสามารถในการจำ นักเรียนไม่ได้เข้าใจสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่ สะท้อนว่าการประเมินความเข้าใจยังคงอยู่ในระดับผิวเผิน มุ่งเน้นการวัดความจำ มากกว่าความเข้าใจอย่างแท้จริง (Mejia-Ramos, J. P. et al., 2012) และไม่สามารถสะท้อนความเข้าใจการพิสูจน์ที่แท้จริงได้ ทำให้การประเมินในลักษณะนี้ไม่สามารถตอบคำถามได้ว่านักเรียนเข้าใจบทพิสูจน์ที่กำลังอ่านหรือไม่

ในทางกลับกัน งานวิจัยด้านคณิตศาสตร์ศึกษาในต่างประเทศเสนอว่า “การอ่านบทพิสูจน์” เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยส่งเสริมและประเมินความเข้าใจได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากการอ่านในบริบทของการพิสูจน์ไม่ได้เป็นเพียงการแปลความหมายของข้อความ แต่เป็นถอดรหัสข้อความ ติดตามกระบวนการพิสูจน์ และสร้างความหมายของบทพิสูจน์ที่อ่าน ซึ่งต่างจากการเขียนพิสูจน์ที่ต้องใช้ความสามารถในเชื่อมโยงตรรกะอย่างเป็นระบบ (Selden, A. & Selden, J., 2015) อย่างไรก็ตาม การอ่านบทพิสูจน์อย่างมีจุดมุ่งหมายกลับไม่ได้ถูกบรรจุไว้ในการเรียนการสอน และการประเมินของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในประเทศไทย แม้จะมีหลักฐานเชิงประจักษ์ว่าวิธีนี้ช่วยให้นักเรียนเข้าใจภาพรวมของบทพิสูจน์ได้ดีขึ้น (Mejia-Ramos, J. P. et al., 2017) “ธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต” จึงมีความสำคัญต่อการออกแบบการเรียนรู้และการประเมินที่ตอบสนองต่อเป้าหมายเชิงลึกของการเรียนคณิตศาสตร์ กล่าวคือ การเข้าใจบทพิสูจน์ที่มีอยู่แล้วถือเป็นจุดเริ่มต้นพื้นฐานก่อนที่ผู้เรียนจะสามารถสร้างบทพิสูจน์ด้วยตนเองได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การศึกษาระบบชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการอ่านบทพิสูจน์มีความสำคัญอย่างยิ่งในบริบทของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากการอ่านเป็นกระบวนการพื้นฐานที่ช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจตรรกะโครงสร้างของบทพิสูจน์ และความสัมพันธ์ระหว่างข้อความภายในบทพิสูจน์ อย่างไรก็ตาม การเรียนการสอนและการประเมินในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมักมุ่งเน้นการให้ผู้เรียนเขียนพิสูจน์ตามตัวอย่างหรือจดจำรูปแบบการเขียน มากกว่าการทำความเข้าใจบทพิสูจน์ที่อ่าน ซึ่งสะท้อนให้เห็นถึงช่องว่างของแนวทางการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ที่แท้จริง การวิจัยครั้งนี้จึงมุ่งศึกษาระบบชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการอ่านบทพิสูจน์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยผู้วิจัยได้พัฒนาเครื่องมือ “งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต” เพื่อให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์และตอบคำถามสะท้อนความเข้าใจ จากนั้นดำเนินการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน และใช้กรอบแนวคิดรูปแบบการอ่านเพื่อทำความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang, K. L. & Lin, F. L., 2008) ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ผลที่ได้คาดว่าจะช่วยอธิบายลักษณะธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของผู้เรียนขณะอ่านบทพิสูจน์ เช่น ความเข้าใจคำศัพท์ สัญลักษณ์ ความสัมพันธ์เชิงตรรกะ และประยุกต์ใช้แนวคิด โดยข้อมูลเหล่านี้จะสามารถใช้เป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่เหมาะสมกับบริบทของโรงเรียนในประเทศไทย และเป็นข้อมูลพื้นฐานสำหรับการวิจัยต่อยอดสู่เนื้อหาอื่นในวิชาคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาระบบชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น



วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาธรรมชาติของความเข้าใจ การพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้ให้ข้อมูลสำคัญเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน ซึ่งคัดเลือกโดยวิธีการเลือกแบบเจาะจง (Purposive Sampling) ตามเกณฑ์ว่าต้องเป็นผู้ที่เคยเรียนเรื่องการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมาก่อนและสามารถสื่อสารทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทั้งนี้ จำนวนผู้ให้ข้อมูลสำคัญได้รับการพิจารณาว่าเพียงพอ เนื่องจากข้อมูลที่ได้มีความลึก ครอบคลุมประเด็นตามกรอบแนวคิด และไม่มีข้อมูลใหม่เกิดขึ้นเพิ่มเติม อันเป็นลักษณะของภาวะข้อมูลอิ่มตัว (Data Saturation) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สร้างขึ้นโดยอิงจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และรูปแบบการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang, K. L. & Lin, F. L., 2008) และ 2) แนวคำถามสำหรับการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน (Task-based Interview) ใช้คำถามปลายเปิดที่ปรับเปลี่ยนได้ตามบริบทของผู้ให้ข้อมูลเพื่อขยายความเข้าใจเชิงลึก การตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา (Content Validity) ของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดำเนินการโดยการประชุมผู้ทรงคุณวุฒิ (Expert Panel Review) จำนวน 5 คน (รวมผู้วิจัย) เพื่อประเมินความเหมาะสม ความชัดเจน และความครอบคลุมของเนื้อหา รวมถึงความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์การวิจัยและกรอบแนวคิดที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล การเก็บข้อมูลแบ่งเป็นสองระยะ ได้แก่ 1) การให้นักเรียนทำ “งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต” ซึ่งนักเรียนต้องอ่านบทพิสูจน์ “กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$ ” ตอบคำถามที่ออกแบบเพื่อสะท้อนความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และ 2) หลังจากทำงานแล้วจะมีการสัมภาษณ์รายบุคคล โดยใช้วิธีการสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างและบันทึกวิธีโอการสัมภาษณ์ทั้งหมดเพื่อใช้ในการถอดเสียงแบบคำต่อคำ (Verbatim Transcription) การวิเคราะห์ข้อมูลดำเนินการ ดังนี้ 1) ข้อมูลจากงานของนักเรียนวิเคราะห์ด้วยการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) และ 2) ส่วนข้อมูลจากบทสัมภาษณ์วิเคราะห์ด้วยการให้รหัส เปรียบเทียบ จัดกลุ่มรหัสย่อย และสังเคราะห์เป็นหมวดหมู่หลักโดยอิงตามกรอบแนวคิดการอ่านเพื่อความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang, K. L. & Lin, F. L., 2008) การวิเคราะห์ใช้โปรแกรม ATLAS.ti เพื่อจัดการข้อมูลเชิงคุณภาพอย่างเป็นระบบ ทั้งนี้ เพื่อตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อมูล ผู้วิจัยได้นำเทคนิคตรวจสอบโดยผู้ให้ข้อมูล (Member Checking) การอภิปรายร่วมกับนักวิจัยอีกคน (Peer Debriefing) การบันทึกสะท้อนคิด (Reflective Memo) และการใช้แหล่งข้อมูลหลากหลาย (Data Triangulation) มาใช้เพื่อยืนยันความถูกต้อง ความลึก และความสอดคล้องของข้อมูลกับบริบทของผู้เรียนอย่างแท้จริง

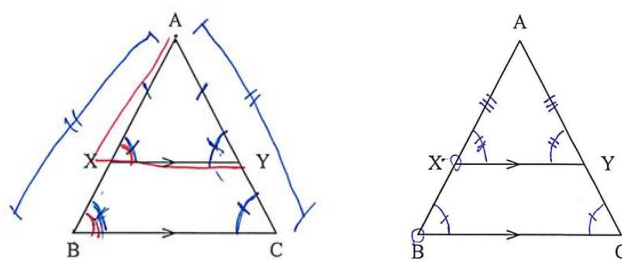
ผลการวิจัย

จากการกำหนดให้นักเรียนอ่านบทพิสูจน์ข้อความ “กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$ ” ตอบคำถามที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นั้น และดำเนินการสัมภาษณ์แบบงานเป็นฐาน ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ และสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เข้าใจรูปที่ประกอบ การพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น นักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น

จากการให้นักเรียนทั้งหมด 6 คน ตอบคำถามที่แสดงความเข้าใจของวัตถุทางเรขาคณิตที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ มีนักเรียน จำนวน 5 คน บอกความหมายของสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เช่น 1) $\triangle ABC$ หมายถึง รูปสามเหลี่ยม ABC และ 2) $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ หมายถึง ส่วนของเส้นตรง XY ขนานกับส่วนของเส้นตรง BC และมีนักเรียนจำนวน 4 คน สามารถให้ความหมายของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ โดยจากการตอบคำถามใน “งาน: ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต” และบทสัมภาษณ์ ตัวอย่างความหมายที่นักเรียนให้ไว้ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หมายถึง “รูปสามเหลี่ยมที่สองด้านเท่ากัน” หรือ “รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันคู่หนึ่ง”

นักเรียนมีความเข้าใจรูปที่ประกอบการพิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น เมื่อขอให้นักเรียนเขียนหมายเลขกำกับมุมที่กำหนดให้ นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถเขียนได้ถูกต้อง และนักเรียนทั้ง 6 คนนี้แสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบนรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น มีการใช้สัญลักษณ์แสดงว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน เช่น การเขียนส่วนโค้ง (4) ที่มุม ABC และมุม ACB และใช้การขีดบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC เพื่อแสดงว่า $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ มีความยาวเท่ากัน ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ตัวอย่างการใช้สัญลักษณ์บนรูปที่ประกอบการพิสูจน์

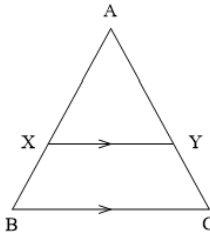
2. นักเรียนสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความ สมบัติที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ และความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์

จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน นักเรียนทุกคนสามารถระบุสมบัติที่นำมาใช้ในการพิสูจน์ได้ เช่น 1) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้านสองด้านยาวเท่ากัน และมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 2) สมบัติของเส้นขนาน มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน และ 3) สมบัติการเท่ากัน และสามารถระบุสถานะเชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์ เช่น 1) $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ ในบรรทัดที่ 2 เป็นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AB = AC$ ทำให้มุม ABC และมุม ACB ที่เป็นมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน และ 2) $AX = AY$ ในบรรทัดที่ 8 เป็นบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เนื่องจาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นักเรียนสามารถระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์ เมื่อให้นักเรียนพิจารณาว่า 1) ถ้าสลับข้อความพิสูจน์ “ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ กำหนดให้” ในบรรทัดที่ 3 กับ “ $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด” ในบรรทัดที่ 4 แล้วกระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8 นั้นถูกต้อง (ดังภาพที่ 2) นักเรียนมีความเห็นอย่างไร นักเรียนทั้ง 6 คน ตอบว่า “ไม่สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 เป็นผลมาจากการกำหนดให้ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ในบรรทัดที่ 3” และ 2) ถ้าสลับข้อความพิสูจน์



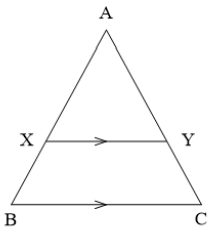
บรรทัดที่ 4 กับ “ $\widehat{ACB} = \widehat{AYX}$ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด” ในบรรทัดที่ 5 แล้วกระบวนการพิสูจน์เรียงบรรทัดใหม่เป็น 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8 นั้นถูกต้อง (ดังภาพที่ 3) นักเรียนมีความเห็นอย่างไร นักเรียนทั้ง 6 คน ให้เหตุผลว่า “สามารถสลับบรรทัดในการเขียนพิสูจน์ได้ เนื่องจากบรรทัดที่ 4 และบรรทัดที่ 5 เป็นการอ้างในทำนองเดียวกัน”



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$
 พิสูจน์

จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
จะได้ $\widehat{ACB} = \widehat{AXY}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
และ $\widehat{ACB} = \widehat{AYX}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 5
ทำให้ $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$	สมบัติของการเท่ากัน	บรรทัดที่ 6
ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน	บรรทัดที่ 7
นั่นคือ $AX = AY$	บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 8

ภาพที่ 2 ตัวอย่างการสลับบรรทัดที่ 3 และบรรทัดที่ 4 ในกระบวนการพิสูจน์



สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$
 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX = AY$
 พิสูจน์

จาก $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำหนดให้	บรรทัดที่ 1
ดังนั้น $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$	สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 2
เนื่องจาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$	กำหนดให้	บรรทัดที่ 3
จะได้ $\widehat{ACB} = \widehat{AYX}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 5
และ $\widehat{ABC} = \widehat{AXY}$	มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด	บรรทัดที่ 4
ทำให้ $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$	สมบัติของการเท่ากัน	บรรทัดที่ 6
ดังนั้น $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน	บรรทัดที่ 7
นั่นคือ $AX = AY$	บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	บรรทัดที่ 8

ภาพที่ 3 ตัวอย่างการสลับบรรทัดที่ 4 และบรรทัดที่ 5 ในกระบวนการพิสูจน์

3. นักเรียนบางส่วนสามารถระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของบทพิสูจน์ และสามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้

จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน มีนักเรียนเพียง 3 คน ที่ระบุได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ เป็นข้อตั้งที่สำคัญ โดยนักเรียน จำนวน 3 คน ที่เหลือระบุว่าไม่มีเพียงข้อตั้ง $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ก็เพียงพอที่จะสรุปว่า $AX = AY$ และนักเรียน จำนวน 3 คน ที่ระบุข้อตั้งที่สำคัญได้ สามารถระบุเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุป $AX = AY$ นั้นต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก่อนจึงจะสร้างข้อสรุปได้ ในขณะเดียวกันเมื่อขอให้ นักเรียนให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ด้วยข้อความสั้น ๆ เพียง 2 - 3 บรรทัด จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน มีเพียง 2 คนเท่านั้น ที่สามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ มีตัวอย่างการให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ดังบทสัมภาษณ์ 1 ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ โดยเลือกอ่านตามการพิสูจน์ที่กำหนดให้ หรือพยายามคิดเกี่ยวกับบทพิสูจน์ที่อ่านและบอกสิ่งที่จำได้ทีละบรรทัด

บทสัมภาษณ์ 1

ผู้วิจัย: สรุปแนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ไหม

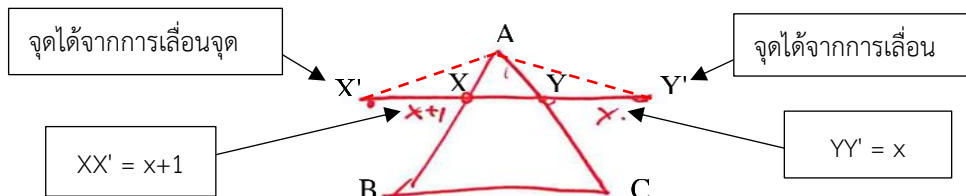
นักเรียน A: ได้ครับ “สรุปว่า $AX = AY$ ด้วยการใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพราะ $\triangle ABC$ มีด้าน ประกอบมียอดยาวเท่ากัน มี $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ทำให้ $\angle B = \angle C$ จะได้ $\angle X = \angle Y$ ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว นั่นคือ $AX = AY$ ”

4. นักเรียนมีวิธีพิจารณาความถูกต้องของการพิสูจน์ 3 ลักษณะ ดังนี้ 1) พิจารณาความสมเหตุสมผล ในรายละเอียดของบทพิสูจน์ 2) เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง และ 3) สร้างวิธีการพิสูจน์ขึ้นใหม่และเปรียบเทียบ ข้อสรุปของการพิสูจน์ นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ในการพิจารณาความถูกต้องของข้อความพิสูจน์ ที่ใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ แต่ไม่สามารถพิจารณาข้อความที่มีความซับซ้อนกว่าได้

นักเรียนทั้งหมด 6 คน สามารถระบุได้ว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง โดยแบ่งวิธีการพิจารณาความถูกต้อง ของการพิสูจน์ออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้ 1) มีนักเรียน จำนวน 3 คน จากทั้งหมด 6 คน พิจารณาความสมเหตุสมผล ในรายละเอียดของบทพิสูจน์ โดยพิจารณาความเชื่อมโยงเชิงตรรกะของข้อตั้งและข้อสรุป และความเชื่อมโยงของ ข้อความพิสูจน์ระหว่างบรรทัด 2) มีนักเรียน 2 คน เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง เพราะรู้สึกว่ามันถูกต้องและ เป็นบทพิสูจน์ที่ครูมอบหมายให้อ่าน และ 3) มีนักเรียนที่เหลืออีก 1 คน ระบุว่าข้อสรุปของบทพิสูจน์ที่อ่านสอดคล้อง กับข้อสรุปของตอนที่ได้จากการพิสูจน์ด้วยวิธีการที่แตกต่าง โดยใช้วิธีการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรง BC ให้มาอยู่ ในตำแหน่งของส่วนของเส้นตรง XY เพื่อสรุปว่า $\overline{BC}$ เป็นเส้นเดียวกับ $\overline{XY}$ แล้วจึงสรุปว่า $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยม หน้าจั่ว เช่นเดียวกับ $\triangle ABC$ โดยไม่พิจารณากระบวนการพิสูจน์ของบทพิสูจน์ที่อ่าน

เมื่อให้นักเรียนทั้ง 6 คน ใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ที่อ่านประกอบการพิจารณาข้อความ 1) “ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่จุดทั้งสองยังคงอยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ เช่นเดิม แล้วข้อสรุปของ การพิสูจน์ยังคงเหมือนเดิมหรือไม่” นักเรียนทั้ง 6 คน สามารถตอบและให้เหตุผลได้ถูกต้องว่า “ข้อสรุปของการ พิสูจน์ $AX = AY$ เพราะ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ จึงใช้สมบัติมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้น มีขนาดเท่ากันได้เหมือนเดิม ไม่ว่าจะเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันให้ไปอยู่ในตำแหน่งใดบนด้าน AB และ AC

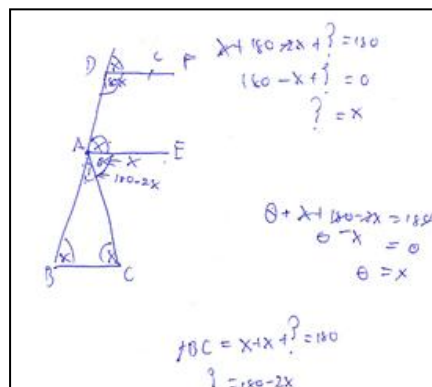
ก็ตาม” 2) “ถ้าเลื่อนจุด X และ Y พร้อมกันโดยที่ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แต่จุดทั้งสองไม่จำเป็นต้องอยู่บนด้าน AB และ AC แล้วผลการพิสูจน์เหมือนเดิมหรือไม่” ซึ่งเป็นข้อความที่มีความซับซ้อนมากขึ้น พบว่า มีนักเรียนเพียง 2 คน จากทั้งหมด 6 คน ที่ตอบและให้เหตุผลได้ถูกต้อง ซึ่งนักเรียนทั้งสองคนตอบว่า “ $AX = AY$ หรือ $AX \neq AY$ ก็ได้ โดยคำตอบจะขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นที่ต่อออกไป” (ดังภาพที่ 4)



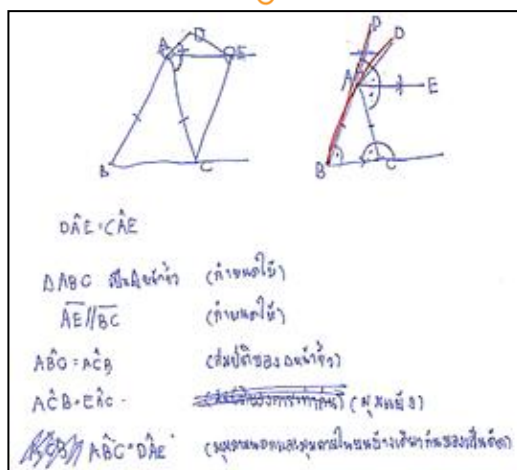
ภาพที่ 4 ตัวอย่างคำตอบที่ถูกต้องของการพิจารณาข้อความ

5. นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดที่ได้จากการอ่านบทพิสูจน์ไปพิจารณาข้อความใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้

เมื่อให้นักเรียน พิจารณาข้อความ 1) “กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มี $AB = AC$ จุด X และ Y อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ และ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ แล้ว $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด” นักเรียนทั้ง 6 คน ยืนยันคำตอบว่า “ $\triangle AXY$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และจะสามารถระบุชนิดของ $\triangle AXY$ ได้ก็ต่อเมื่อมีการกำหนดชนิดของ $\triangle ABC$ ” แต่ในทางกลับกันเมื่อขอให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความ 2) “กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมี $AB = AC$ ต่อ $\overline{BA}$ ไปทางจุด A ถึงจุด D และที่จุด A ลาก $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle DAE = \angle CAE$ ” ซึ่งนักเรียนต้องใช้แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านในการพิสูจน์ว่า $\angle DAE = \angle CAE$ จากนักเรียนทั้งหมด 6 คน มีเพียง 2 คนเท่านั้นที่สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดในการพิสูจน์ว่า $\angle DAE = \angle CAE$ แต่เมื่อพิจารณากระบวนการพิสูจน์ของนักเรียนคนแรกโดยละเอียด พบว่า มีลักษณะการให้เหตุผลที่วนซ้ำ ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพที่ 5 ในขณะที่นักเรียนคนที่ 2 สามารถเขียนแสดงกระบวนการพิสูจน์ได้ถูกต้องและสามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถสร้างข้อสรุปในบรรทัดสุดท้ายได้ว่า $\angle DAE = \angle CAE$ ซึ่งมีรายละเอียดดังภาพที่ 6



ภาพที่ 5 ตัวอย่างการแสดงผลการพิสูจน์ข้อความของนักเรียนคนที่ 1



ภาพที่ 6 ตัวอย่างการเขียนแสดงการพิสูจน์ข้อความของนักเรียนคนที่ 2

อภิปรายผล

ในขณะที่นักเรียนอ่านบทพิสูจน์มีการกำหนดสัญลักษณ์ลงรูปที่ประกอบการพิสูจน์ให้สอดคล้องกับข้อความพิสูจน์ เพื่อทำความเข้าใจสัญลักษณ์ที่อ่านพบและข้อความพิสูจน์ ติดตามกระบวนการพิสูจน์ ตระหนักถึงความสัมพันธ์ของรูปประกอบกับกระบวนการพิสูจน์ สร้างความเชื่อมโยงระหว่างข้อความพิสูจน์ที่อ่านกับรูปประกอบการพิสูจน์ และสร้างความหมายของข้อความพิสูจน์ที่กำลังอ่าน ส่งผลให้นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ สัญลักษณ์ และรูปประกอบการพิสูจน์ และนักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงรูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น ซึ่งสอดคล้องกับการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาจะส่งผลโดยตรงกับ ความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang, K. L., 2012) อีกทั้งยังช่วยให้นักเรียนใช้เวลาในการย้อนกลับมาอ่านน้อยลง

นักเรียนที่ระบุข้อตั้งที่สำคัญได้บางเงื่อนไข อาจจะเข้าใจเพียงองค์ประกอบย่อยของบทพิสูจน์ที่อ่าน ไม่ได้เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์ นอกจากนี้ นักเรียนที่สามารถระบุข้อสรุปที่สำคัญ แต่ไม่สามารถระบุเงื่อนไขที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของการพิสูจน์ได้นั้น อาจจะไม่ได้เข้าใจภาพรวม เช่นเดียวกัน และนักเรียนที่สามารถให้แนวคิดหลักของบทพิสูจน์ที่อ่านได้นั้น แสดงถึงนักเรียนเข้าใจโครงสร้างของการพิสูจน์ซึ่งสอดคล้องกับด้านการให้ข้อสรุปของรูปแบบการอ่านเพื่อทำความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang, K. L. & Lin, F. L., 2008) และรูปแบบการประเมินความเข้าใจการพิสูจน์ (Mejia-Ramos, J. P. et al., 2012) ในขณะที่ Davies, B. & Jones, I. กล่าวว่าข้อสรุปของการพิสูจน์สามารถแสดงถึงความเข้าใจการพิสูจน์ (Davies, B. & Jones, I., 2021) ดังนั้น นักเรียนที่ไม่สามารถให้ข้อสรุปของบทพิสูจน์ได้อาจจะไม่เข้าใจสิ่งที่กำลังอ่าน

นักเรียนที่เชื่อว่าบทพิสูจน์ที่ได้รับมอบหมายให้อ่านนั้นถูกต้องเสมอ โดยตัดสินความถูกต้องของบทพิสูจน์ด้วยเหตุผลเพียง เพราะรู้สึกว่ามันถูกต้อง และตลอดที่เรียนในชั้นเรียนครูไม่เคยมอบหมายบทพิสูจน์ที่ไม่ถูกต้องให้อ่าน และนักเรียนที่ตัดสินความถูกต้องของบทพิสูจน์ที่อ่าน ด้วยการพิสูจน์ข้อความพิสูจน์ที่กำหนดให้อ่านด้วยวิธีการใหม่ โดยอาศัยการพิจารณาข้อสรุปของบทพิสูจน์ที่อ่านตรงกับข้อสรุปที่ได้จากการพิสูจน์ที่สร้างขึ้นใหม่นั้น ถือว่าข้อสรุปของบทพิสูจน์ที่อ่านนั้นถูกต้อง แม้ว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง แต่นักเรียนไม่ได้พิจารณากระบวนการพิสูจน์ของบทพิสูจน์ที่อ่าน สนใจเพียงข้อสรุปที่ได้ อาจกล่าวได้ว่านักเรียนสนใจเพียงข้อสรุปบรรทัดท้ายของบทพิสูจน์ และเชื่อว่าบทพิสูจน์

ที่อ่านนั้นถูกต้องอยู่แล้วไม่จำเป็นต้องพิจารณากระบวนการพิสูจน์ ซึ่งลักษณะการพิจารณาความถูกต้องของบทพิสูจน์ ที่อ่านของนักเรียนทั้งสองลักษณะนี้ สอดคล้องกับแนวคิดการพิสูจน์แบบอำนาจนิยมของ Harel, G. & Sowder, L. ที่กล่าวว่านักเรียนมีแนวโน้มที่จะมองว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่จำเป็นต้องอาศัยเหตุผลภายในมาอธิบายประกอบ แม้จะเข้าใจว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ “จริง” แต่กลับไม่ให้ความสำคัญกับกระบวนการพิสูจน์ความจริงดังกล่าว ความเชื่อของนักเรียนจึงมักตั้งอยู่บนรากฐานของข้อความที่ปรากฏในหนังสือเรียน หรือคำกล่าวของครูผู้สอน (Harel, G. & Sowder, L., 1998)

เมื่อขอให้นักเรียนพิสูจน์ว่า $D\hat{A}E = C\hat{A}E$ พบว่า นักเรียนคนที่ 1 สามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ ที่อ่านเรื่องมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันในการแสดงการพิสูจน์ ข้อความได้ และสามารถสรุปผลการพิสูจน์ได้ถูกต้อง แสดงว่านักเรียนประสบความสำเร็จในการอ่านบทพิสูจน์ เนื่องจากพยายามพิสูจน์ข้อความ (Weber, K., 2015) อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาการเขียนแสดงการพิสูจน์ พบว่า การพิสูจน์ที่แสดงมีขั้นตอนที่ซับซ้อนและมีการให้เหตุผลที่วนซ้ำ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ ขาดการทวนซ้ำเพื่อตรวจสอบ กระบวนการพิสูจน์ที่กำลังเขียนสนใจเพียงการประยุกต์ความรู้ และนักเรียนคนที่ 2 สามารถระบุเงื่อนไข หรือ ข้อความพิสูจน์ได้ถูกต้อง โดยสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ว่าต้องพิสูจน์อะไร โจทย์กำหนดอะไรมาให้ ใช้สมบัติ ไตบ้าง ยกเว้นเขียนสรุปว่า $D\hat{A}E = C\hat{A}E$ ในบรรทัดสุดท้าย แม้ว่าสามารถประยุกต์ความรู้เรื่องมุมภายนอกและมุม ภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันมาใช้ในการพิสูจน์ได้ แต่ท้ายที่สุดแล้วไม่สามารถ สรุปผลการพิสูจน์ได้ อาจกล่าวได้ว่าไม่เข้าใจภาพรวมของการพิสูจน์เนื่องจากไม่สามารถเชื่อมโยงข้อตั้งทั้งหมด เพื่อสร้างข้อสรุปได้

สรุปและข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยเกี่ยวกับธรรมชาติของความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่นักเรียนแสดงออกในงานวิจัยนี้ พบว่า 1) นักเรียนเข้าใจความหมายคำศัพท์ และสัญลักษณ์ที่พบจากการอ่านบทพิสูจน์ได้ เข้าใจรูปที่ประกอบการ พิสูจน์ผ่านสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนรูปนั้น นักเรียนแสดงความเข้าใจข้อความพิสูจน์โดยการกำหนดสัญลักษณ์ลงบน รูปให้สอดคล้องกับข้อความในบทพิสูจน์นั้น 2) นักเรียนสามารถระบุสถานะของข้อความได้ ระบุมุมสมบัติที่นำมาใช้ ในการพิสูจน์ และระบุความสัมพันธ์เชิงตรรกะของข้อความในบทพิสูจน์ 3) นักเรียนระบุข้อตั้งที่สำคัญ เงื่อนไข ที่จำเป็นในการสร้างข้อสรุปของบทพิสูจน์ และมีนักเรียนเพียงส่วนน้อยที่สามารถให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ได้ 4) นักเรียนบางส่วนพิจารณาความสมเหตุสมผลในรายละเอียดของบทพิสูจน์เพื่อตัดสินความถูกต้องของการพิสูจน์ ได้ และนักเรียนสามารถใช้ข้อมูลจากการพิสูจน์ที่อ่านในการพิจารณาความถูกต้องของข้อความที่ไม่ซับซ้อนได้ และ 5) นักเรียนสามารถประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิจารณาข้อความใกล้เคียงกับบทพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถ ประยุกต์แนวคิดในการพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนได้ การวิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้ 1) หากจะนำข้อสรุปของการวิจัย ที่ได้ไปใช้ประกอบการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเสริมสร้างความเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ควรส่งเสริม การให้แนวคิดหลักของการพิสูจน์ที่สามารถสื่อความหมายได้ชัดเจน การใช้ข้อมูลจากบทพิสูจน์ที่อ่านเพื่อพิจารณา ความถูกต้องของข้อความที่ซับซ้อน และการประยุกต์แนวคิดจากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่า

และ 2) ในการศึกษาครั้งถัดไป ควรศึกษาว่าทำไมนักเรียนไม่สามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อความ หรือ ประยุกต์แนวคิดที่ได้จากบทพิสูจน์ที่อ่านไปพิสูจน์ข้อความที่ซับซ้อนกว่าได้

เอกสารอ้างอิง

- Conradie, J. & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 225-235.
- Davies, B. & Jones, I. (2021). Assessing Proof Reading Comprehension Using Summaries. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(3), 469-489.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In Schoenfeld, A. H., Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III*. (pp. 234-283). Rhode Island: American Mathematical Society.
- Inam, B. et al. (2018). High School Students' Performances on Proof Comprehension Tests. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 5(2), 339-369.
- Komatsu, K. (2017). Fostering empirical examination after proof construction in secondary school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 129-144.
- Mejia-Ramos, J. P. et al. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3-18.
- _____. (2017). Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics. *Research in Mathematics Education*, 19(2), 130-146.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Selden, A. & Selden, J. (2015). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. Paper presented at the Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik Conference 2015. Retrieved January 12, 2025, from <https://shorturl.asia/Y8PQo>
- Stylianou, D. A. et al. (2009). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. New York: Routledge.
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 289-314.
- Yang, K. L. & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307-326.