

โมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อออกแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์*

REPRESENTATION Model for Designing Mathematics Instruction

ดวงมณี ยะอำพัน
Duangmanee Ya-Amphan
มหาวิทยาลัยขอนแก่น
Khon Kaen University, Thailand
E-mail: duangmanee@kku.ac.th

บทคัดย่อ

การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่จำเป็นอย่างยิ่งทักษะหนึ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอความหมายของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์และเพื่อนำเสนอโมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (REPRESENTATION Model) ด้วยการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องและการใช้การวิเคราะห์เนื้อหา (Content Analysis)

โมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เป็นโมเดลที่รวมคำศัพท์เชิงวิชาการทางการศึกษา 14 คำที่ได้มาจากการวิเคราะห์รูปแบบการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของ Bruner, Lesh, Goldin และ Miura ผสานกับแนวคิดทฤษฎีจิตวิทยา ทฤษฎีการเรียนรู้ ธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ ภาพรวมของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยทั้งครูและนักเรียน ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบต่างๆ สร้างเป็นโมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ใช้ในการออกแบบแผนการเรียนการสอนและนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อกระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียน เพื่อพัฒนาการสื่อสารร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อที่นักเรียนจะสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย รวมถึงสามารถนำความรู้และทักษะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพต่อไป

คำสำคัญ: การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์; โมเดลการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์; การออกแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์



Abstract

Mathematical representation is one of the most important skills for supporting students' Mathematics learning achievements. The objectives of this paper are to present the practical definition of representation and to suggest REPRESENTATION Model derived from reviewing relevant literature and from employing Content Analysis.

REPRESENTATION Model is a creation of 14 new educational terms derived from an analysis of Mathematical Representation forms which discovered by Bruner, Lesh, Goldin and Miura accompanied with psychological theories, learning theories, nature of mathematics, all-inclusive mathematics class components such as teacher and students, and all elements relationships which are used to create REPRESENTATION Model in order to be a guideline for mathematics teachers to design their lesson plans and to manage their mathematics instructions. As a result, the teachers could engage students' participations and develop mutual communication in their classrooms. Consequently, students in the class could learn meaningful mathematics lessons. Moreover, they could perceive mathematical knowledge and mathematical processes to solve further mathematical problems effectively.

Keywords: Representation; REPRESENTATION Model; Mathematics Instruction

1. บทนำ

ในสังคมยุคข้อมูลข่าวสารประชาชนสามารถเข้าถึงและรับรู้ข้อมูลข่าวสารที่มีปริมาณเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและมากมายราวกับเลขยกกำลังทุกประเทศยอมรับว่าประชาชนจำเป็นต้องมีความรู้ทั้งเนื้อหาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; กระทรวงศึกษาธิการ, 2560; อัมพร ม้าคะนอง, 2557)

ทักษะหนึ่งที่มีความจำเป็น มีความสำคัญและมีบทบาทต่อการจัดการข้อมูลข่าวสารคือ

ทักษะการนำเสนอข้อมูล (Representation) (Stylianou, 2010, pp. 325-343) ซึ่งทักษะนี้ ได้ถูกกำหนดให้เป็นหนึ่งในห้าทักษะของมาตรฐานในสาระด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ในเอกสารหลักการและมาตรฐานหลักสูตรที่มีชื่อว่า Principles and Standards for School Mathematics โดยสภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) และกำหนดไว้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดฯ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) โดยที่ทักษะ



การนำเสนอข้อมูลถูกรวมเข้าไว้ในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้าน “การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์” (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560, หน้า 3; หน้า 44)

ทักษะการนำเสนอข้อมูลเป็นคำที่นักวิชาการไทยใช้แทนคำว่า Representation ซึ่งเป็นคำที่ใช้ในสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา (Brinker, 1997; Sun, 2005) เนื่องจากเป็นหนึ่งในห้าทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards) (NCTM, 2000) คำๆ นี้ ถูกแปลเป็นภาษาไทยแตกต่างกันไปตามแนวคิดและการนำไปใช้ อาทิ เช่น การนำเสนอข้อมูล การแสดงแทน ภาพแทน ฯลฯ ผู้เขียนเลือกใช้คำว่า การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อกำหนดให้ชัดว่าเป็นคำที่แสดงถึงทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ทักษะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่จำเป็นอย่างยิ่งทักษะหนึ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กันอย่างแยกไม่ออกกับทักษะการสื่อสาร (Mathematical communication) (Kosko & Wilkins, 2010, pp. 79-90) เมื่อต้องการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก็จะต้องมีการใช้การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เช่นเดียวกันกับเมื่อมีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ก็เพื่อต้องการสื่อสารแนวคิดคณิตศาสตร์ เนื่องจากการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะกระบวนการเพื่อสื่อสารความคิด ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ โดยนำเสนอผ่านการแสดงออกในรูปแบบต่างๆ เช่น คำพูด รูปภาพ สื่อจริง สื่อประกอบการสอน สัญลักษณ์ นิยาม เป็นต้น (Lesh, 1979, pp. 111-180) ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Piries

(1998, p. 8) ที่ระบุถึงการใช้การแสดงแทนที่สามารถมองเห็นได้ (Visual representation) ว่าเป็นหนึ่งในวิธีการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 6 วิธีการตามแนวคิดของ Piries การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จึงถือว่าเป็นเครื่องมือสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การแสดงแทนที่หลากหลายจะช่วยสร้างและช่วยถ่ายทอดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ทั้งในด้านสาระและทักษะกระบวนการการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนต่อผู้อื่นได้ (อัมพร ม้าคะนอง, 2557; วจีมาศ ชัยพฤกษทล, เอื้อจิตร พัฒนจักร และไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2561)

งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการแสดงแทนที่หลากหลาย (Multiple representations) พบว่าการสอนคณิตศาสตร์ที่มีการใช้การเชื่อมโยง (transition) ระหว่างการแสดงแทนหลายรูปแบบ ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนสามารถมองเห็น เข้าใจและสามารถสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องได้ และสามารถใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นไปใช้เป็นเครื่องมือเพื่อช่วยแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อื่นๆ ได้ (Cuoco and Curcio, 2001; Kaput, 1989; Jao, 2009) แต่จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์นั้น ผู้เขียนพบว่า ยังไม่มีความเห็นที่พ้องกันของนักวิชาการการศึกษา ทั้งในด้านคำศัพท์ภาษาไทยที่ใช้แทนคำว่า Representation รวมทั้งยังไม่มี ความเห็นที่พ้องกันในด้านความหมายของ Representation ทั้งในวรรณกรรมจากต่างประเทศและในประเทศไทย รวมถึงยังไม่มีแนวทาง



การนำการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ไปใช้เพื่อออกแบบกิจกรรมในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอความหมายของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์และเพื่อนำเสนอ REPRESENTATION Model ต่อครูผู้สอนคณิตศาสตร์เพื่อให้สามารถนำไปใช้ออกแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้

2. การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ มีนักวิชาการที่มีชื่อเสียงในด้านนี้ได้ให้ความหมายไว้ดังนี้

Lesh (1981) ได้ให้ความหมายว่าการแสดงแทน หมายถึง การนำเสนอที่ประกอบด้วยระบบของสัญลักษณ์ การใช้ภาษาพูด สัญลักษณ์ การเขียน รูปภาพ รูปแบบ การจัดการ สถานการณ์จริง

Brinker (1997) ได้ให้ความหมายว่าการแสดงแทน หมายถึง สัญลักษณ์หรือรูปภาพที่นักเรียนได้วาดขึ้น เช่น การวาดตารางของเศษส่วน และการทำเศษส่วนเป็นแท่งๆ

NCTM (2000) ได้ให้ความหมายว่าการแสดงแทน หมายถึง การแสดงกระบวนการและผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกมา เพื่ออธิบายแนวคิดของตนให้ผู้อื่นได้เข้าใจ

Goldin and Shteingold (2001) ได้ให้ความหมายว่าการแสดงแทน คือการจัดกลุ่มสัญลักษณ์ คุณลักษณะ รูปภาพ หรือตัววัตถุ

บางอย่างที่แสดงหรือแทนสิ่งที่เราพูดถึง

จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องรวมถึงการวิเคราะห์หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดฯ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560) ผู้เขียนสรุปความหมายของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ได้ว่าการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารความคิดความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นภายในสมองของแต่ละบุคคล โดยการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ (ที่ได้) มา นำเสนอ-ใหม่ (re-present) ให้อยู่ในรูปแบบที่เข้าใจง่าย ที่เป็นรูปธรรม เพื่อให้สามารถสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนให้ผู้อื่นเข้าใจ ผ่านการแสดงออกในรูปแบบต่างๆ อาทิเช่น การพูด การใช้สื่ออุปกรณ์ของจริงต่างๆ การสรุปเป็นสูตร กฎ และแบบจำลองคณิตศาสตร์ ฯลฯ นอกจากนี้ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือ (tools) และวิธีการ (ways) เพื่อสื่อสารความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้แก้ปัญหาและเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์และทางสังคมได้อีกด้วย

จากความหมายดังกล่าวข้างต้น ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ต้องตระหนักถึงความสำคัญและประโยชน์ของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนจะมีโอกาสในการได้พัฒนาทักษะฯ นี้ก็ต่อเมื่อชั้นเรียนนั้นๆ มีการออกแบบการเรียนการสอนที่มีกิจกรรมให้นักเรียนได้ฝึกฝนทักษะทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นครูผู้สอนคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องหาแนวทางใน



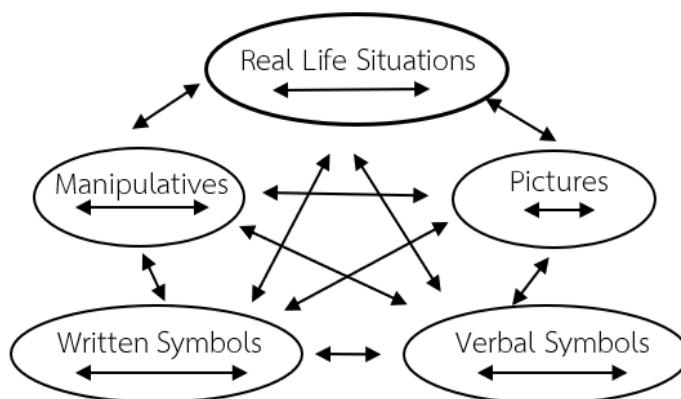
การออกแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนสามารถพัฒนาทักษะการ แสดงแทนทางคณิตศาสตร์

2. การวิเคราะห์เนื้อหา (Content Analysis) เป็นหนึ่งในวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative data analysis) การวิเคราะห์เนื้อหา เป็นกระบวนการจัดหมวดหมู่ของข้อมูล ใช้การ วิเคราะห์ การตีความจากข้อมูลเพื่อสร้างข้อสรุป (วัชรินทร์ อินทพรหม, 2562, หน้า 314-333; เอี่ยมพร หลินเจริญ, 2555, หน้า 17-29; Bowen, 2009, pp. 27-40) ผู้เขียนใช้การวิเคราะห์เนื้อหา เพื่อวิเคราะห์รูปแบบการแสดงผลแทนทางคณิตศาสตร์ ของนักการศึกษาที่มีชื่อเสียงทั้ง 4 ท่าน คือ Bruner, Lesh, Goldin และ Miura โดยแยก พิจารณาตามองค์ประกอบต่างๆ ได้แก่ ทฤษฎี จิตวิทยา ทฤษฎีการเรียนรู้ กระบวนการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ บทบาทของครู บทบาทของนักเรียน บทบาทของสื่อ และความสัมพันธ์ขององค์ประกอบ ต่างๆ เพื่อใช้เป็นกรอบในการวิเคราะห์ การตีความ และนำไปสู่การเสนอข้อสรุปใหม่ คือ โมเดลการ แสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (REPRESENTATION Model)

2.1 การวิเคราะห์รูปแบบของการ แสดงแทนทางคณิตศาสตร์ ผู้เขียนเลือกรูปแบบ การแสดงผลแทนทางคณิตศาสตร์ของนักการศึกษาที่มีชื่อเสียงมา 4 กรอบแนวคิด ดังนี้

กรอบแนวคิดที่ 1 Bruner (1960; 1966) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนา กระบวนการคิดของเด็ก โดยได้อธิบายถึงพัฒนาการ ทางสมองที่เน้นการถ่ายทอดประสบการณ์ในการ จัดการเรียนรู้ที่เกี่ยวกับการแสดงแทนด้วย Three Stages of Representations-E-I-S ว่ามนุษย์ สามารถเรียนหรือคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ 3 ระดับดังนี้ 1) ระดับที่มีประสบการณ์ตรงและ สัมผัสได้ (Enactive Stage-E) เป็นการเรียนรู้ที่เกิด จากการกระทำ เป็นการสัมผัสกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม (Concrete Objects or Manipulatives) เช่น บล็อกสีบ รูปทรงเรขาคณิต ตลับเมตร ถ้วยตวง ตาชั่ง นาฬิกา ฯลฯ 2) ระดับของการใช้ภาพเป็นสื่อ (Iconic Stage-I) เป็นการเรียนรู้ที่เกิดจากการใช้ จินตนาการ การนึกภาพ การใช้ภาพแสดงแทนสิ่ง ที่ได้สัมผัสในระดับที่หนึ่ง และ 3) ระดับของการ สร้างความสัมพันธ์และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage-S) ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนสามารถเขียน สัญลักษณ์แทนสิ่งที่เห็นในระดับที่สอง หรือสิ่งที่ สัมผัสในระดับที่หนึ่งได้โดยนักเรียนสามารถพัฒนา มาสู่การคิดที่เป็นนามธรรมได้

กรอบแนวคิดที่ 2 Lesh (1979) กล่าวว่า ในระหว่างการเรียนรู้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะมีวิธีการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เพื่อ แสดงแทนความคิดรวบยอดของตน ประกอบด้วย 5 รูปแบบ ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 โมเดลของเลช (Lesh, 1979)

1) บริบทในชีวิตจริง (Real Life Situations) เป็นการแสดงแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ที่ฝังตัวอยู่ในบริบทที่คุ้นเคย ซึ่งจะก่อให้เกิดประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นทางการของนักเรียน ซึ่งเป็นการพูดหรือสร้างสถานการณ์ปัญหาที่แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับโลกจริง

2) การแสดงแทนด้วยสื่อ (Manipulatives) หมายถึง สื่ออุปกรณ์ (เชิงกายภาพ) ที่ครูเตรียมเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ การแสดงแทนนี้นักเรียนจำเป็นต้องมีประสบการณ์เชิงนามธรรมเพื่อการเรียนคณิตศาสตร์

3) การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์ การเขียน (Written Symbols) เป็นการสะท้อนความคิดความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ผ่านการเขียนประโยคสัญลักษณ์ของคณิตศาสตร์และการเขียนเกี่ยวกับแนวคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ สูตร และกฎต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

4) การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์ การพูด (Verbal Symbols) หมายถึงการสะท้อนความคิดความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์โดยสื่อออกมาจากการพูด และอธิบายด้วยภาษาของตนเอง

5) การแสดงแทนด้วยรูปภาพ (Picture) เป็นการวาดรูปวัตถุที่เป็นสื่อแทนความหมายทางคณิตศาสตร์ เช่น รูปบล็อก แท่งบล็อก การแสดงแทนด้วยรูปภาพช่วยกระตุ้นให้นักเรียนสามารถอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น

กรอบแนวคิดที่ 3 Goldin (2003, pp. 275-285) กล่าวว่า การแสดงแทนแสดงถึงทั้งกระบวนการและผลลัพธ์ จึงสามารถแบ่งประเภทของการแสดงแทนได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้ 1) การแสดงแทนภายนอก (External representation) หรือ Instructional Representation เป็นการแสดงแทนที่ครูใช้เป็นเครื่องมือ (tools) ในการส่งผ่านความรู้ไปสู่ผู้เรียนซึ่งในที่นี้จะหมายรวมถึงการแสดงแทนที่เป็นทั้งภาษาพูด ภาษาเขียน กราฟ



ตาราง แผนภาพ/แผนภูมิ สัญลักษณ์และสื่อต่างๆ (Manipulatives) 2) การแสดงแทนภายใน (Internal representation) หรือ Cognitive Representations เป็นภาพที่ปรากฏในสมองหรือความคิดของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับสิ่งต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้รูปภาพในเรื่องเดียวกันของนักเรียนแต่ละคนอาจจะแตกต่างกันตามประสบการณ์การเรียนรู้และการแก้ปัญหา ซึ่งนักเรียนต้องสร้างขึ้นด้วยตนเองจากการถูกเร้าจากการแสดงแทนภายนอก

กรอบแนวคิดที่ 4 Miura (2001) กล่าวว่า ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ การแสดงแทนที่ส่งผลต่อความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่อปัญหาคณิตศาสตร์และต่อแนวทางในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท

ดังนี้ 1) การแสดงแทนด้านการเรียนการสอน (Instructional Representations) การแสดงแทนประเภทนี้ ผู้ที่มีบทบาทคือครู ครูมีหน้าที่สอนเนื้อหาคณิตศาสตร์ ด้วยการเตรียมการแสดงแทนด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน ยกตัวอย่างเช่น นิยาม ตัวอย่าง โมเดลหรือแบบจำลอง และสื่อการเรียนรู้ 2) การแสดงแทนด้านความรู้ความเข้าใจ (Cognitive Representations) การแสดงแทนประเภทนี้ ผู้ที่มีบทบาทคือ นักเรียน โดยนักเรียนจะสร้างการแสดงแทนขึ้นขึ้นมาขณะสร้างความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์และขณะพยายามหาแนวทางแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

จากรูปแบบของการแสดงแทนข้างต้น ผู้เขียนวิเคราะห์ข้อดีและข้อจำกัดของแต่ละรูปแบบ ดังแสดงในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงผลการวิเคราะห์รูปแบบการแสดงแทนของนักการศึกษา 4 กรอบแนวคิด

กรอบแนวคิด	ข้อดี	ข้อจำกัด
Bruner (1960, 1966)	1) มีฐานแนวคิดมาจากทฤษฎีจิตวิทยาของ Piaget ที่สนใจในเรื่องพัฒนาการตามวัยและทฤษฎีการเรียนรู้ที่เน้นกระบวนการทางปัญญาหรือความคิด (Cognitivism) 2) เมื่อวิเคราะห์อย่างถี่ถ้วน จะเห็นความสัมพันธ์ของ Enactive mode, Iconic mode และ Symbolic mode (E-I-S) ที่จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาความคิดและความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ได้ 3) รูปแบบนี้จึงถูกใช้มากในมุมมองของครูในแง่การออกแบบเฉพาะสื่อให้เป็น E-I-S	1) ยังไม่มีการกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างบทบาทครูและนักเรียนต่อการใช้สื่อ ในฐานะที่สื่อเป็นตัวกลางในการแสดงวิธีคิดและกระบวนการคิดของนักเรียน 2) เนื้อหาคณิตศาสตร์บางเนื้อหาอาจมีข้อจำกัดในการออกแบบสื่อประเภท Enactive Representation



กรอบแนวคิด	ข้อดี	ข้อจำกัด
Lesh (1979)	1) รูปแบบนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหาของตนเองได้อย่างหลากหลาย 2) มีฐานแนวคิดจากทฤษฎีการเรียนรู้พฤติกรรมนิยม (Behaviorism) กล่าวคือ พฤติกรรมมนุษย์เกิดจากสิ่งเร้า ซึ่งในที่นี้คือ สื่อ (Manipulatives) และการเรียนรู้เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง 3) มี Model แสดงให้เห็นถึงการแสดงแทนและความเกี่ยวข้อง เชื่อมโยงกันของการแสดงแทนทั้ง 5 แบบ	รูปแบบนี้ถูกใช้มากในมุมมองของนักเรียน ขาดการเชื่อมและพัฒนาต่อในมุมมองด้านครุศาสตร์
Goldin (2003)	1) มีฐานแนวคิดมาจากทฤษฎีการเรียนรู้ Constructivist ที่ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้ได้ด้วยตนเองเมื่อมีสิ่งเร้า (External Representation) มากระตุ้น 2) มีฐานแนวคิดจากทฤษฎีการเรียนรู้พฤติกรรมนิยม (Behaviorism) กล่าวคือ พฤติกรรมมนุษย์เกิดจากสิ่งเร้า และการเรียนรู้เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง	ขาดการเชื่อมระหว่างการแสดงแทนภายนอก (External Representations) และการแสดงแทนภายใน (Internal Representations) ที่ชัดเจน
Miura (2001)	1) แนวคิดนี้มีความเชื่อพื้นฐานว่า การแสดงแทนเป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนสามารถทำความเข้าใจกับปัญหาและหาแนวทางแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 2) มีฐานแนวคิดจากทฤษฎีการเรียนรู้ Constructivist ที่ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้ได้ด้วยตนเองเมื่อมีสิ่งเร้า (Instructional Representations) มากระตุ้น 3) รูปแบบของการแสดงแทนระบุบทบาทของครูและนักเรียนชัดเจน	ขาดการเชื่อมระหว่างการแสดงแทนด้านการเรียนการสอน (Instructional Representations) และการแสดงแทนด้านความรู้ความเข้าใจ (Cognitive Representations) ที่ชัดเจน



จากตารางที่ 1 แสดงผลการวิเคราะห์รูปแบบการแสดงแทนของนักการศึกษา 4 กรอบแนวคิด พบว่า แต่ละกรอบฯ ต่างก็มีทั้งข้อดีและข้อจำกัดแตกต่างกัน

2.2 REPRESENTATION Model จากข้อดีและข้อจำกัดของแนวคิดรูปแบบการแสดงแทนของนักการศึกษา 4 กรอบแนวคิด ดังแสดงในตารางที่ 1 นั้น ผู้เขียนขอเสนอ REPRESENTATION Model ที่เกิดจากการนำตัวอักษรแต่ละตัวของคำว่า REPRESENTATION มาใช้ขึ้นต้นเป็นตัวอักษรแรกของคำใหม่ โดยคำใหม่ทั้ง 14 คำนี้ได้มาจากการทบทวนวรรณกรรม และจากการนำข้อดีในตารางที่ 1 มาผนวกกับประสบการณ์ในการสอนและประสบการณ์ในการนิเทศการสอนคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นของผู้เขียน ผสานกับแนวคิดทฤษฎีจิตวิทยาทฤษฎีการเรียนรู้ ธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ ภาพรวมของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยทั้งครูและนักเรียน ทัศนคติของครู วัตถุประสงค์ที่ครูตั้งไว้ สื่อที่ครูเตรียม สื่อที่นักเรียนจะแสดงแนวคิดของตน รวมทั้งองค์ประกอบที่กล่าวมา นำมาสังเคราะห์เป็น REPRESENTATION Model เพื่อช่วยให้ครูผู้สอนคณิตศาสตร์มีแนวทางในการออกแบบแผนการเรียนการสอนและนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยคำที่ผู้เขียนได้สร้างขึ้นใหม่ทั้ง 14 คำมีความหมายดังนี้

R-Real Life Situations บริบทการใช้ชีวิตในโลกแห่งความเป็นจริงของนักเรียน โดยครูอาจจะใช้สื่อ ใช้สถานการณ์ปัญหาด้วยการเล่าเรื่องที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน

E-Enactive Representation เป็นการเรียนรู้ผ่านการลงมือกระทำ เน้นเรื่องการทำ (Acting) เช่น การใช้บล็อกสับเพื่อทำความเข้าใจเรื่องค่าประจำหลัก

P-Pictorial การแสดงแทนโดยการใช้รูปภาพ (Icon) หรือที่เรียกว่า Iconic Representation ที่เน้นเรื่อง การจินตนาการ (Imaging) เป็นการวาดรูปวัตถุที่เป็นสื่อแทนความหมายทางคณิตศาสตร์ เช่น รูปวงกลมที่แบ่งเป็นส่วนที่เท่าๆ กันเพื่อแสดงแทนเศษส่วน

R-Roles of Teacher and of Students บทบาทของครูและนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งครูและนักเรียนควรเปิดใจยอมรับบทบาทและความสำคัญของการแสดงแทนคณิตศาสตร์ต่อชั้นเรียนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในฐานะที่การแสดงแทนภายนอกและการแสดงแทนภายในมีความสัมพันธ์สลับสับเปลี่ยนบทบาทกันตลอดเวลาอย่างแยกไม่ออก ครูจึงต้องเปลี่ยนบทบาทจาก “ผู้บอกคณิตศาสตร์” (Telling Mathematics) มาเป็น coach และ/หรือ facilitator ผู้จัดสถานการณ์ จัดเตรียมสื่ออุปกรณ์ให้ และเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์และสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง (Doing Mathematics)

E-External Representation การแสดงแทนภายนอก อาจจะเรียกชื่ออีกอย่างได้ว่าเป็น Instructional Representation เป็นสิ่งที่เห็นได้จับต้องได้เชิงกายภาพ ที่ครูเตรียมเพื่อกระตุ้น/รื้อให้นักเรียนสามารถเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์สามารถคิดได้จากสิ่งนั้น และใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ เช่น บล็อกสับ กราฟ



ตาราง เป็นต้น

S-Symbolic Representation เน้นเรื่อง ภาษา สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ นิยาม สูตร กฎต่างๆ ของคณิตศาสตร์ที่แสดงให้เห็นถึงความ เป็นนามธรรมของคณิตศาสตร์

E-Experiential Learning การเรียนรู้จากประสบการณ์ เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่ผ่านการลงมือทำ (Concrete Experience) เป็นการให้นักเรียนมีโอกาสได้เรียนรู้ผ่านการปฏิบัติ การหยิบจับ การทดลองทำ ประโยชน์จากการเรียนรู้จากประสบการณ์จะทำให้เกิดการเข้าใจอย่างชัดเจนยิ่งขึ้น และการเรียนรู้นั้นจะคงทนยิ่งขึ้น

N-Nature of Mathematics ธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นนามธรรมสูง นักเรียนประสบความยากลำบากในการทำ ความเข้าใจในตัวเนื้อหา

T-Tools for Thinking and for learning เครื่องมือการคิด (เชิงคณิตศาสตร์) และเครื่องมือในการเรียนรู้ (คณิตศาสตร์) ของนักเรียน สำหรับครูเป็น Tools for Teaching Mathematics เป็นเครื่องมือเพื่อให้ครูสามารถสื่อสารเนื้อหา คณิตศาสตร์ไปถึงผู้เรียน เพื่อที่ผู้เรียนจะสามารถ เรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างเข้าใจ

A-(Teacher's) Aims & Attitudes จุดมุ่งหมายและทัศนคติของครูในการออกแบบ และจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นส่วนที่สำคัญยิ่งและส่งผลต่อการออกแบบกิจกรรมและ การสร้างบรรยากาศในชั้นเรียน วัตถุประสงค์ของ การสอนและทัศนคติของครูควรต้องเปิดกว้างและ เปลี่ยนไปจากการบอกคณิตศาสตร์ (Telling

Mathematics) เป็น การจัดกระบวนการเรียน การสอน การออกแบบและจัดหาสื่อการเรียนการสอน เพื่อให้นักเรียนมีโอกาสในการทำคณิตศาสตร์ (Doing Mathematics)

T-TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) ความรู้ในการ บูรณาการ เทคโนโลยี เป็นการที่ครูนำความรู้ทางเทคโนโลยี มาบูรณาการกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เช่น การใช้ Geometer's Sketchpad (GSP) GeoGebra เพื่อช่วยสอนคณิตศาสตร์

I-Internal Representation การแสดงแทนภายใน อาจจะเรียกชื่ออีกอย่างได้ว่าเป็น Cognitive Representation เป็นกระบวนการคิดหรือกระบวนการสร้างความเข้าใจที่เกิดขึ้น ในสมอง แนวคิดที่เกิดในสมองนั้นสามารถ แสดงออกมาได้หลากหลายรูปแบบ

O-Objects วัตถุที่สามารถจับต้องได้ ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ Objects หมายถึง สื่อการเรียนรู้อ (Instructional Material) เป็นสื่ออุปกรณ์ ที่ครูจัดเตรียม และ/หรือออกแบบมาเพื่อให้ นักเรียนใช้ในการพัฒนาและสร้างความรู้ความ เข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical concepts)

N-National curriculum หลักสูตร แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดฯ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) กำหนดทั้งสาระและ มาตรฐานการเรียนรู้และทักษะและกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์ หนึ่งในทักษะที่จำเป็นและต้อง พัฒนาให้เกิดในตัวผู้เรียน คือ “ความสามารถใน



การสื่อสารและสื่อความหมาย” (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560, หน้า 3) ซึ่งการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญที่จะกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดทักษะๆ นี้

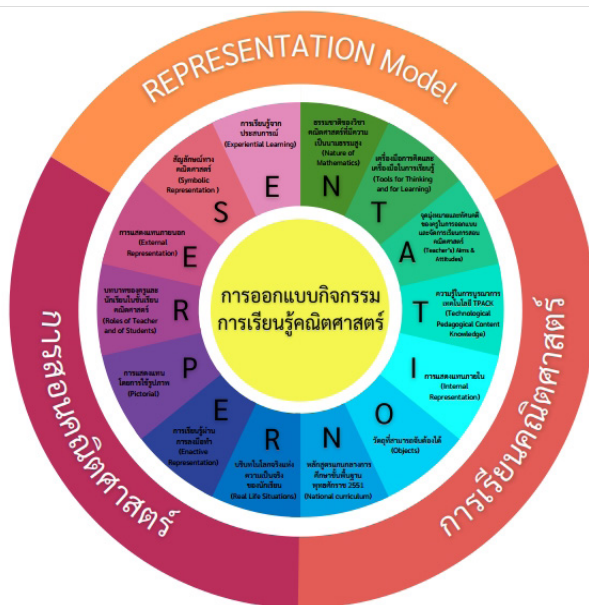
3. สรุป

การเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 สิ่งที่สำคัญประการหนึ่ง คือ การเตรียมนักเรียนให้มีความรู้ทั้งด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อเตรียมพร้อมให้นักเรียนสามารถรับมือกับการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรมและสิ่งแวดล้อม และเพื่อให้สามารถจัดการและนำเสนอข้อมูลที่มีอยู่หลากหลายได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทักษะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์จึงเป็นทักษะที่มีความสำคัญทักษะหนึ่งที่ต้องพัฒนาให้กับนักเรียน การที่นักเรียนจะมีโอกาสพัฒนาทักษะนี้ได้ นั้น ต้องเกิดมาจากการออกแบบการเรียนการสอนที่วางเป้าหมายโดยครูที่เห็นความสำคัญของทักษะการแสดงแทนทาง

คณิตศาสตร์และออกแบบให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ ได้มีโอกาสพัฒนาทักษะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของตนกระตุ้นการเรียนรู้ของนักเรียน เพื่อที่นักเรียนจะได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายและอย่างมีประสิทธิภาพ

4. องค์ความรู้ที่ได้รับ

บทความนี้เสนอ REPRESENTATION Model ที่เกิดจากการนำตัวอักษรแต่ละตัวของคำว่า REPRESENTATION มาใช้ขึ้นต้นเป็นตัวอักษรแรกของคำใหม่ โดยคำใหม่ทั้ง 14 คำนี้ ประกอบด้วย คำที่เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบที่สำคัญในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่ได้มาจากการสังเคราะห์ทฤษฎีจิตวิทยาการเรียนรู้และการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้เกิดประโยชน์ต่อครูคณิตศาสตร์ในการประยุกต์ใช้โมเดลนี้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ



ภาพที่ 2 REPRESENTATION Model

เอกสารอ้างอิง

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- วชิมาศ ชัยพฤกษทล, เอื้อจิตร พัฒนจักร และไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2561). การแสดงแทนในลำดับกิจกรรมการสอนในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาขั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. เข้าถึงได้จาก <https://app.gs.kku.ac.th/gs/th/publicationfile/item/19th-ngrc-2018/HMP5/HMP5.pdf>
- วัชรินทร์ อินทพรหม. (2562). การวิเคราะห์และการนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ. *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร*, 10(2), 314-333.
- อัมพร ม้าคะนอง. (2557). *คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม*. (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เอื้อมพร หลินเจริญ. (2555). เทคนิคการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ. *วารสารการวัดผลการศึกษา*, 17(1), 17-29.
- Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, 9(2), 27-40.



- Brinker, L. (1997). *Using structured representations to solve fraction problems: A discussion of seven students' strategies*. Retrieved from <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.827.2259&rep=rep1&type=pdf>
- Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.
- _____. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Cuoco, A. and Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics (2001 Yearbook)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin and D. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. and Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco and F. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Jao, L. (2009). *Constructing mathematical knowledge using multiple representations: A case study of a grade one teacher*. (Master of Arts). Toronto: University of Toronto.
- Kaput, J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner and C. Kieran (Eds.). *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). New York: Routledge.
- Kosko, K. W. and Wilkin, J. L. M. (2010). Mathematical communication and its relation to the frequency of manipulative use. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2), 79-90.
- Lesh, R. (1979). Mathematical Learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis, and remediation. *Applied Mathematical Problem Solving*, 111-180.
- _____. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235-264.
- Miura, I. (2001). The influence of Language on Mathematical Representations. In F. R. Curcio (Ed.). *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 1-21). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.



- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piries, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (Slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi and A. Sierpiska (Eds.). *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianou, D. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343.
- Sun, Y. (2005). *The role of instructional representations on students' written representations and achievements*. Retrieved from <http://oaktrust.library.tamu.edu/bitstream/handle/1969.1/4243/etd-tamu-2005B-EDCI-Sun.pdf>