

การใช้พีชคณิตพิสูจน์จุดเก้าจุดบนวงรีโดยการสร้างจากสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ สอดคล้องกับทฤษฎีวงรีเก้าจุด

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์^{1*}

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1. ศึกษาและแสดงการใช้พีชคณิตพิสูจน์จุดเก้าจุดในรูปทั่วไปบนวงรีซึ่งสร้างจากสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ สอดคล้องทฤษฎีวงรีเก้าจุด และ 2. เพื่อแสดงว่าจุดศูนย์กลางภายในจุดร่วม และ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ จากการวิจัยพบว่า จุดทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปของวงรี และ จุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

คำสำคัญ : พีชคณิต วงรี วงรีเก้าจุด

¹ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์
ในพระบรมราชูปถัมภ์ จังหวัดปทุมธานี

* ผู้นิพนธ์หลัก e-mail: kachint@vru.ac.th

THE USE OF ALGEBRA TO PROOF THE NINE-POINT ELLIPSE CONSTRUCTED BY RIGHT-ANGLED TRIANGLE CONFORMITY OF THE NINE POINT THEORY

Kachin Kokanotapron^{1*}

Abstract

This research aims to study and present the proof of the nine-point ellipse theorem which constructed by right-angled triangle by using algebra, and to show incenter, centroid and nine-point center which associated with generalization of the Euler line. The result showed that the nine-point all lie on circumference of the ellipse and incenter, centroid and nine-point center associated with generalization of the Euler line.

Keywords : Algebra, Ellipse, Nine-point Ellipse

¹ Assistant Professor of Program in Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Valaya Alongkorn Rajabhat University Under The Royal Patronage,

* Corresponding author, e-mail: kachin@vru.ac.th

บทนำ

MacKay (1892) ได้รวบรวมประวัติทฤษฎีวงกลมเก้าจุด โดยเริ่มตั้งแต่ปี ค.ศ. 1765 ซึ่งได้กล่าว ว่า ออยเลอร์ (Euler) เป็นผู้ค้นพบทฤษฎีวงกลมเก้าจุดเป็นคนแรก ในปี ค.ศ. 1827 เดวิส (T. S. Davies) พิสูจน์สมบัติเฉพาะของทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และบทแทรก ที่ว่าด้วยจุดศูนย์กลางที่อยู่ในตำแหน่งบนเส้นซึ่งอยู่บน จุดตัดกันของส่วนสูงทั้งสามของสามเหลี่ยม บนจุดศูนย์กลางของจุดเก้าจุด และบนเส้นรอบวงกลม ใน ปี ค.ศ. 1828 สไตเนอร์ (Steiner) สร้างคุณสมบัติเฉพาะของทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และในปี ค.ศ. 1833 แสดงทฤษฎี วงกลมสิบจุดที่เกี่ยวข้องกับสามเหลี่ยมที่อยู่บนเส้นรอบวงกลม ปี ค.ศ. 1842 เทอร์ควีมส์ (Terquem) แสดง การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดที่สัมพันธ์กับวงกลมแนบใน และวงกลมแนบนอก ปี ค.ศ. 1850 เมนชัน (J. Mention) แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbachs โดยใช้กระบวนการทางเรขาคณิต เป็นคนแรก ปี ค.ศ. 1854 ลีว (W. H. Levy) ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbachs โดยใช้กระบวนการทางเรขาคณิต ปี ค.ศ. 1855 วิลคินสัน (T. T. Wilkinson) ศึกษาเกี่ยวกับ ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ปี ค.ศ. 1857 จอห์น จอชัว โรบินสัน (John Joshua Robinson) แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับทฤษฎีวงกลมเก้า ปี ค.ศ. 1860 รีเวอร์ จอร์จ แซลเมน (Reverend George Salmon) ศึกษาเพิ่มเติมทฤษฎีวงกลมเก้าจุดที่เรียกว่า ทฤษฎีของ Feuerbachs

ต่อมาปี ค.ศ. 2005 มิเชล ดี วิลเลอร์ เสนอภาคตัดกรวยเก้าจุด ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งจุด กึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม และจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลาก จากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายใน จะอยู่บนเส้นรอบรูปของภาคตัดกรวยและได้เสนอลักษณะทั่วไปของ เส้นออยเลอร์ (Euler line generalization) คือเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และจุดศูนย์กลางของ ภาคตัดกรวยเก้าจุด และจุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยเก้าจุดแบ่งลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์เป็นอัตราส่วน 1:3 ได้นำเสนอและแสดงการพิสูจน์ในวารสาร Pythagoras (Michael, 2005)

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ด้วยวิธีการพิสูจน์ทางเรขาคณิตและ เก้าจุดบน ภาคตัดกรวยของมิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael, 2006) ซึ่งจุดทั้งเก้าสร้างโดยสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมภายในอีก สองมุมเป็นมุมที่มีขนาด ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่สร้างจุดทั้งเก้าโดยสร้างจากสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุมภายในอีก สองมุมมีขนาดทั่วไป และแสดงจุดทั้งเก้าที่สร้างโดยสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ สอดคล้องวงรีเก้าจุดและ แสดงว่าจุด ศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องสมบัติลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและแสดงการใช้พีชคณิตพิสูจน์จุดเก้าจุดในรูปทั่วไปบนวงรีซึ่งสร้างจาก สามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ สอดคล้องทฤษฎีวงรีเก้าจุด
2. เพื่อแสดงว่าจุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะ ทั่วไปของเส้นออยเลอร์

วิธีดำเนินการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัย

จุดเก้าจุดซึ่งสร้างโดยสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ได้แก่ จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุด ยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับ จุดศูนย์กลางภายใน ทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี และแสดงว่า จุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และจุดศูนย์กลาง ของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

กรอบแนวคิดในการวิจัย

การศึกษาวงรีเก้าจุด แสดงการพิสูจน์วงรีเก้าจุด โดยเริ่มจากการสร้างจุดทั้งเก้า สร้างโดยสามเหลี่ยม มุมฉากใด ๆ สร้างสมการวงรี แสดงว่าจุดทั้งเก้าสอดคล้องสมการวงรี จุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และจุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด ใช้พีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับระยะทางระหว่างจุดสองจุด พิกัดของจุดกึ่งกลาง ความชันของเส้นตรง สมการของเส้นตรง วงรี สมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวย สามเหลี่ยมคล้าย เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณของครึ่งมุม และหลักเกณฑ์คราเมอร์

การดำเนินการวิจัย

ทฤษฎีวงรีเก้าจุด คือ วงรีซึ่งมีเก้าจุดที่สร้างจากรูปสามเหลี่ยม ได้แก่ จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม และจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับ จุดศูนย์กลางภายในอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี และ จุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วม และ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ ซึ่งการวิจัยในครั้งนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC บนระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งกำหนดให้มุม B มีขนาด θ_1 และมุม C มีขนาด θ_2 โดยจุด A มีพิกัดคือ $(0,0)$ จุด B มีพิกัดคือ $(b,0)$ และ จุด C มีพิกัดคือ $(0,c)$ สำหรับ $a,b,c > 0$ ดังภาพที่ 1 ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB คือ b หน่วย ความยาวของส่วนของเส้นตรง AC คือ c หน่วย และ ความยาวของส่วนของเส้นตรง BC คือ a หน่วย

ขั้นตอนที่ 2 หาพิกัดจุด D, E และ F ซึ่งเป็นจุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอด C, B และ A ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางภายใน (H) ซึ่งเป็นจุดตัดของ $\overline{BE}$ กับ $\overline{CD}$

หาพิกัดจุด D ซึ่งเกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุม C ตัดกับ $\overline{AB}$ พบว่าความยาวของส่วนของเส้นตรง AC คือ c หน่วย ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AD คือ x หน่วย

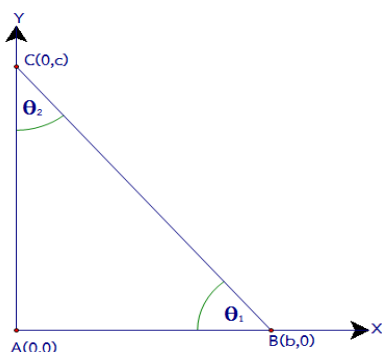
$$\text{พิจารณา } \tan \frac{\frac{q_2}{2}}{\frac{q_2}{2}} = \frac{x}{c} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{พิจารณา } \tan \frac{\frac{q_2}{2}}{\frac{q_2}{2}} = \frac{\sin(q_2)}{1 + \cos(q_2)} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{b}{a+c} \quad \dots\dots\dots(2)$$

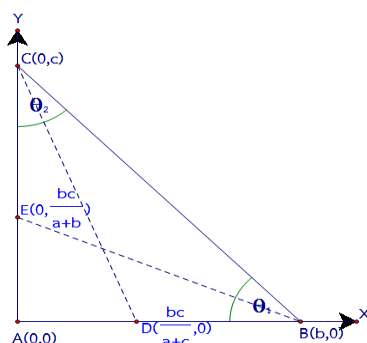
$$\text{จากสมการ(1) และสมการ (2); } \frac{b}{a+c} = \frac{x}{c} \text{ จึงได้ } x = \frac{bc}{a+c}$$

$$\text{ดังนั้น พิกัดจุด } D \text{ คือ } \left(\frac{bc}{a+c}, 0 \right) \text{ ดังภาพที่ 2}$$

หาพิกัดจุด E ซึ่งเกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุม B ตัดกับ $\overline{AC}$ พบว่าความยาวของส่วนของเส้นตรง AB คือ b หน่วย ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AE คือ y หน่วย ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับหาพิกัดจุด D ดังนั้น พิกัดจุด E คือ $\left(0, \frac{bc}{a+b}\right)$ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 1 สามเหลี่ยม ABC



ภาพที่ 2 พิกัดจุด E

หาพิกัดจุด H ซึ่งเป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรง BE กับ CD

พิจารณาสมการเส้นตรง BE ซึ่งผ่านจุด $B(b,0)$ และ $E\left(0, \frac{bc}{a+b}\right)$

$$\text{หาความชันของเส้นตรง } BE; m_{BE} = \frac{0 - \frac{cb}{a+b}}{b - 0} = -\frac{c}{a+b}$$

จึงได้สมการเส้นตรง BE ผ่านจุด $B(b,0)$ และมีความชัน $m_{BE} = -\frac{c}{a+b}$ คือ $\frac{cx}{a+b} + y = \frac{bc}{a+b}$

พิจารณาสมการเส้นตรง CD ซึ่งผ่านจุด $C(0,c)$ และ $D\left(\frac{bc}{a+c}, 0\right)$ ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหา

สมการเส้นตรง BE ดังนั้นจึงได้สมการเส้นตรง CD คือ $\frac{x(a+c)}{b} + y = c$

พิจารณาจุดตัดของส่วนของเส้นตรง BE กับ ส่วนของเส้นตรง CD

$$\frac{cx}{a+b} + y = \frac{bc}{a+b} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{x(a+c)}{b} + y = c \quad \dots\dots\dots(6)$$

นำสมการ (5)- สมการ(6); $\frac{cx}{a+b} - \frac{x(a+c)}{b} = \frac{bc}{a+b} - c$

$$\frac{c}{b} \cdot \frac{a^2 - ab - ac}{(a+b)b} = -\frac{ac}{a+b}$$

$$x = \frac{bc}{a+b+c} \quad \text{แทนในสมการ (6)}$$

$$y = \frac{bc}{a+b+c}$$

ดังนั้น พิกัดจุด H คือ $\left(\frac{bc}{a+b+c}, \frac{bc}{a+b+c}\right)$ ดังภาพที่ 3

หาพิกัดจุด F เป็นจุดตัดของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด H ตัดกับ $\overline{BC}$

ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาพิกัดจุด H ดังนั้น พิกัดจุด F คือ $\left(\frac{bc}{b+c}, \frac{bc}{b+c}\right)$ ดังภาพที่ 3

ขั้นตอนที่ 3 หาพิกัดจุด G, I และ J ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}, \overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ

และ หาพิกัดจุด K, L และ M ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AH}, \overline{CH}$ และ $\overline{BH}$ ตามลำดับ

$$\text{พิกัดจุด } G = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+c}{2}\right) = \left(0, \frac{c}{2}\right)$$

$$\text{พิกัดจุด } I = \left(\frac{0+b}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$$

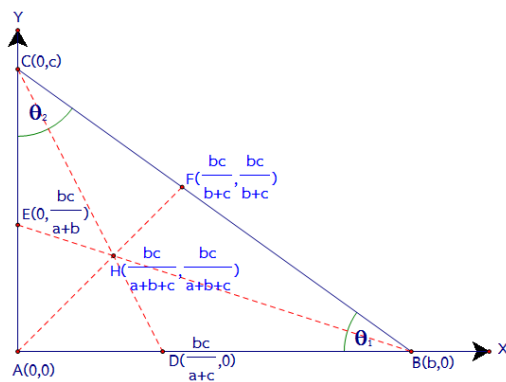
$$\text{พิกัดจุด } J = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$\text{พิกัดจุด } K = \left(\frac{0}{2}, \frac{bc}{2(a+b+c)}\right), \frac{bc}{2(a+b+c)}$$

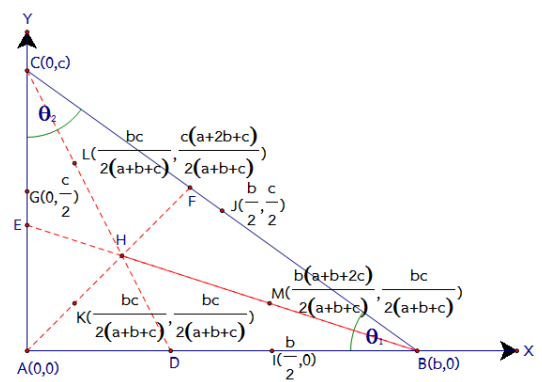
$$\text{พิกัดจุด } L = \left(\frac{bc}{2(a+b+c)}, \frac{c(a+2b+c)}{2(a+b+c)}\right)$$

$$\text{พิกัดจุด } M = \left(\frac{b(a+2c+b)}{2(a+b+c)}, \frac{bc}{2(a+b+c)}\right)$$

แสดงพิกัดจุด G, I, J, K, L และ M ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 3 พิกัดจุด H



ภาพที่ 4 พิกัดจุด G, I, J, K, L และ M

ขั้นตอนที่ 4 หาสมการวงรี โดยสร้างจากสมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{เมื่อ } A, B, C, D, E \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{นำ } \frac{1}{A} \cdot \text{สมการ (8); } x^2 + \frac{C}{A}y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{ให้ } a_1 = \frac{B}{A}, b_1 = \frac{C}{A}, c_1 = \frac{D}{A}, d_1 = \frac{E}{A} \text{ และ } e_1 = \frac{F}{A} \text{ แทนค่าในสมการ (9)}$$

$$\text{จึงได้} \quad a_1xy + b_1y^2 + c_1x + d_1y + e_1 = -x^2 \text{ เมื่อ } a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 \in \mathbb{R} \quad \text{.....(10)}$$

ให้สมการ (10) ผ่านจุด จุด $D\left(\frac{bc}{a+c}, 0\right)$, $E\left(0, \frac{bc}{a+b}\right)$, $G\left(0, \frac{c}{2}\right)$, $I\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ และ

$$K\left(\frac{bc}{2(a+b+c)}, \frac{bc}{2(a+b+c)}\right)$$

$$\text{ผ่านจุด } D\left(\frac{bc}{a+c}, 0\right) \quad \frac{bc}{a+c}c_1 + e_1 = -\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} \quad \text{.....(11)}$$

$$\text{ผ่านจุด } E\left(0, \frac{bc}{a+b}\right) \quad \frac{b^2c^2}{(a+b)^2}b_1 + \frac{bc}{a+b}d_1 + e_1 = 0 \quad \text{.....(12)}$$

$$\text{ผ่านจุด } G\left(0, \frac{c}{2}\right) \quad \frac{c^2}{4}b_1 + \frac{c}{2}d_1 + e_1 = 0 \quad \text{.....(13)}$$

$$\text{ผ่านจุด } I\left(\frac{b}{2}, 0\right) \quad \frac{b}{2}c_1 + e_1 = -\frac{b^2}{4} \quad \text{.....(14)}$$

$$\text{ผ่านจุด } K\left(\frac{bc}{2(a+b+c)}, \frac{bc}{2(a+b+c)}\right) \quad \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2}d_1 + \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2}d_1 + \frac{bc}{2(a+b+c)}c_1 + \frac{bc}{2(a+b+c)}d_1 + e_1 = -\frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} \quad \text{.....(15)}$$

จากสมการ (11) ถึง (15) ใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule) หาค่า a_1, b_1, c_1, d_1 และ e_1

$$\text{ให้ } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{bc}{a+c} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} & 0 & \frac{bc}{a+b} & 1 \\ 0 & \frac{c^2}{4} & 0 & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & 1 \\ \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \end{pmatrix} \text{ และ}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{b^2}{4} \\ \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} \end{pmatrix} \text{ ได้ระบบสมการ } AX = B \text{ หาค่า } \det(A) \text{ โดยกระจายตามหลักที่ 2 } (j=2)$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^5 a_{i2} C_{i2} = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32} + a_{42} C_{42} + a_{52} C_{52}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{52} C_{52} = \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{bc}{a+c} & 0 & 1 \\ \frac{b^2 c^2}{(a+b)^2} & 0 & \frac{bc}{a+b} & 1 \\ \frac{c^2}{4} & 0 & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & \frac{b}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} \begin{vmatrix} \frac{b^2 c^2}{(a+b)^2} & \frac{bc}{a+b} & 1 \\ \frac{c^2}{4} & \frac{c}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{b}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{b^2 c^2}{(a+b)^2} & \frac{bc}{a+b} & 1 \\ \frac{c^2}{4} & \frac{c}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} \left[\frac{b^2 c^4 (a-b)}{4(a+c)(a+b)^2} - \frac{b^2 c^3 (a-b)}{8(a+b)^2} \right] \\
 &= \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} \left[\frac{b^2 c^3 (a-b)(a-c)}{8(a+c)(a+b)^2} \right] = \frac{-b^4 c^5 (a-b)(a-c)}{32(a+c)(a+b)^2 (a+b+c)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{จึงได้ } \det(A) = \frac{-b^4 c^5 (a-b)(a-c)}{32(a+c)(a+b)^2 (a+b+c)^2}$$

$$\text{ให้ } A_1 = \begin{vmatrix} -\frac{b^2 c^2}{(a+c)^2} & 0 & \frac{bc}{a+c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2 c^2}{(a+c)^2} & 0 & \frac{bc}{a+b} \\ 0 & \frac{c^2}{4} & 0 & \frac{c}{2} \\ -\frac{b^2}{4} & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{b^2 c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & \frac{bc}{2(a+b+c)} \end{vmatrix}$$

หาค่า $\det(A_1)$ ใช้วิธีการคำนวณทำนองเดียวกับการหาค่า $\det(A)$

$$\text{จึงได้ } \det(A_1) = \sum_{i=1}^5 a_{i2} C_{i2} = -\frac{b^5 c^5 (bc - ac - ba + a^2)}{16(a+c)^2 (a+b)^2 (a+b+c)}$$

$$\text{ดังนั้น } a_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{2b(bc - ac - ab + a^2)}{(a+c)(a-c)(a-b)}$$

$$\text{ให้ } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b^2c^2}{(a+b)^2} & \frac{bc}{a+c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{bc}{a+b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & -\frac{b^2}{4} & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & -\frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & \frac{bc}{2(a+b+c)} \end{pmatrix}$$

หาค่า $\det(A_2)$ ใช้วิธีการคำนวณทำนองเดียวกับการหาค่า $\det(A)$

$$\text{จึงได้ } \det(A_2) = -\frac{b^5c^4(a-b)(a-c)}{32(a+b+c)^2(a+c)^2(a+b)}$$

$$\text{ดังนั้น } b_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{b(a+b)}{c(a+c)}$$

$$\text{ให้ } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} & 0 & \frac{bc}{a+b} \\ 0 & \frac{c^2}{4} & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{b^2}{4} & 0 \\ \frac{b^2c^2}{64(a+b+c)^2} & \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & -\frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} \end{pmatrix}$$

หาค่า $\det(A_3)$ ใช้วิธีการคำนวณทำนองเดียวกับการหาค่า $\det(A)$

$$\text{จึงได้ } \det(A_3) = -\frac{b^5c^5(-3c^2+a^2+2ac)(a-b)}{64(a+b+c)^2(a+c)^2(a+b)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } c_1 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -\frac{b(-3c^2+a^2+2ac)}{2(a+c)(a-c)}$$

$$\text{ให้ } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{bc}{a+c} & -\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} \\ 0 & \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b^2}{4} \\ \frac{b^2c^2}{64(a+b+c)^2} & \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & -\frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} \end{pmatrix}$$

หาค่า $\det(A_4)$ ใช้วิธีการคำนวณทำนองเดียวกับการหาค่า $\det(A)$

$$\text{จึงได้ } \det(A_4) = \frac{b^5c^5(a-c)(-3b^2+a^2+2ab)}{64(a+b+c)^2(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } d_1 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = -\frac{b(-3b^2+a^2+2ab)}{2(a+c)(a-b)}$$

ให้

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{bc}{a+c} & 0 & -\frac{b^2c^2}{(a+c)^2} \\ 0 & \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} & 0 & \frac{bc}{a+b} & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{4} & 0 & \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{b^2}{4} \\ \frac{b^2c^2}{64(a+b+c)^2} & \frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & \frac{bc}{2(a+b+c)} & -\frac{b^2c^2}{4(a+b+c)^2} \end{pmatrix}$$

หาค่า $\det(A_5)$ ใช้วิธีการคำนวณทำนองเดียวกับการหาค่า $\det(A)$

$$\text{จะได้ } \det(A_5) = -\frac{b^6c^6(a-c)(a-b)}{64(a+b+c)^2(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } e_1 = \frac{\det(A_5)}{\det(A)} = \frac{b^2c}{2(a+c)}$$

$$\text{แทนค่า } a_1 = \frac{2b(bc-ac-ab+a^2)}{(a+c)(a-c)(a-b)}, b_1 = \frac{b(a+b)}{c(a+c)}, c_1 = -\frac{b(-3c^2+a^2+2ac)}{2(a+c)(a-c)},$$

$$d_1 = -\frac{b(-3b^2+a^2+2ab)}{2(a+c)(a-b)} \text{ และ } e_1 = \frac{b^2c}{2(a+c)} \text{ ในสมการ (10)}$$

จากสมการ (10); $a_1xy + b_1y^2 + c_1x + d_1y + e_1 = -x^2$

จัดรูปสมการ

ตรวจสอบว่าสมการ (16) เป็นสมการวงรีหรือไม่โดยอาศัยสมบัติการจำแนกประเภทของภาค

จึงได้ $B^2 < 4AC$ นั่นคือ $B^2 - 4AC < 0$

ดังนั้น สมการ (16) เป็นสมการวงรี

ผลการวิจัย

จากการวิจัยพบว่า

1. จะแสดงว่าจุด D, E, F, G, I, J, K, L และ M สอดคล้องสมการวงรี จากสมการวงรี (16);

$0 = 0$ เป็นจริง

จึงได้ว่า จุด $D \left(\frac{ac}{a+c}, 0 \right)$ สอดคล้องสมการวงรี (16);

สำหรับจุด E, F, G, I, J, K, L และ M ใช้วิธีการแสดงทำนองเดียวกับการแสดงว่าจุด D สอดคล้องสมการวงรี (16)

ดังนั้น จุด D, E, F, G, I, J, K, L และ M สอดคล้องสมการวงรี

2. จะแสดงว่าจุดศูนย์กลางภายใน (H) จุดรวม (G) และ จุดศูนย์กลางวงรี (N) สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

หาจุดศูนย์กลางของวงรี จากสมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยคือ $h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$ และ $k = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$

(อำพล ธรรมเจริญ, 2542) จากสมการวงรี (16) จึงได้ $A = 2c(a + c), B = 4bc, C = 2b(a + b),$

$D = bc(a + 3c)$ และ $E = bc(a + 3b)$

$$h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot \frac{bc}{3}(a + b) \cdot \frac{bc}{3}(a + 3c) - [4bc] \cdot \frac{bc}{3}(a + 3b)}{[4bc]^2 - 4 \cdot \frac{bc}{3}(a + c) \cdot \frac{bc}{3}(a + b)} = \frac{b(a + b + 2c)}{4(a + b + c)}$$

$$k = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{2 \cdot \frac{bc}{3}(a + c) \cdot \frac{bc}{3}(a + 3b) - [4bc] \cdot \frac{bc}{3}(a + 3c)}{[4bc]^2 - 4 \cdot \frac{bc}{3}(a + c) \cdot \frac{bc}{3}(a + b)} = \frac{c(a + 2b + c)}{4(a + b + c)}$$

ดังนั้น พิกัดจุด N คือ $\left(\frac{bc(a + b + 2c)}{4(a + b + c)}, \frac{c(a + 2b + c)}{4(a + b + c)} \right)$

หาจุดพิกัดจุด G ซึ่งเกิดจากกันตัดกันของส่วนของเส้นตรง $\overline{CI}$ กับส่วนของเส้นตรง $\overline{BG}$ ใช้

วิธีการหาทำนองเดียวกับกับการหาพิกัดจุด H ดังนั้น พิกัดจุด G คือ $\left(\frac{bc}{3}, \frac{c}{3} \right)$

จะแสดงว่าจุด H, G และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกันโดย โดยแสดงว่าทุกคู่ของจุดทั้งสามมี

$$\text{ความชันเท่ากัน พิจารณาความชัน } m_{\overline{HN}} = \frac{\frac{bc}{a + b + c} - \frac{c}{4(a + b + c)}}{\frac{bc}{a + b + c} - \frac{b(a + b + 2c)}{4(a + b + c)}} = \frac{c(a - 2b + c)}{b(a + b - 2c)}$$

$$\text{พิจารณาความชัน } m_{\overline{HG}} = \frac{\frac{bc}{a + b + c} - \frac{c}{3}}{\frac{bc}{a + b + c} - \frac{b}{3}} = \frac{c(a - 2b + c)}{b(a + b - 2c)}$$

$$\text{พิจารณาความชัน } m_{\overline{NG}} = \frac{\frac{c(a + 2b + c)}{4(a + b + c)} - \frac{c}{3}}{\frac{b(a + b + 2c)}{4(a + b + c)} - \frac{b}{3}} = \frac{c(a - 2b + c)}{b(a + b - 2c)}$$

จาก $m_{\overline{HN}} = m_{\overline{HG}} = m_{\overline{NG}}$ ดังนั้น จุด H, G และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน(17)

จะแสดงว่า $|\overline{HN}| = 3|\overline{NG}|$

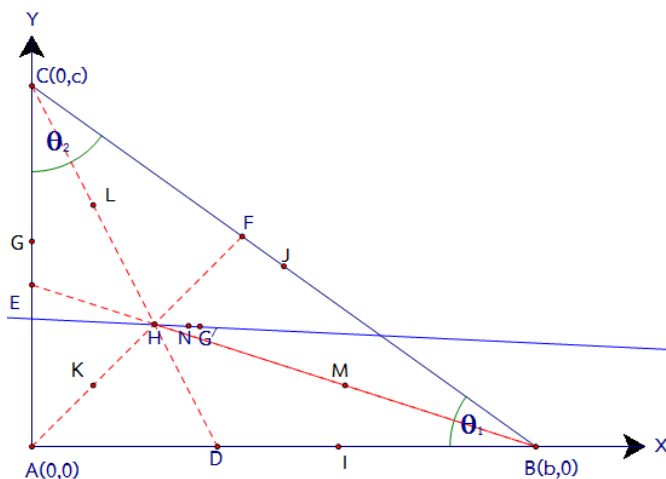
$$\begin{aligned} |\overline{HN}| &= \sqrt{\left(\frac{bc}{a + b + c} - \frac{b(a + b + 2c)}{4(a + b + c)} \right)^2 + \left(\frac{bc}{a + b + c} - \frac{c(a + 2b + c)}{4(a + b + c)} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{b^2(2c - a - b)^2 + c^2(2b - a - c)^2}}{4(a + b + c)} \end{aligned}$$

$$|\overline{NG}| = \sqrt{\left(\frac{bc(a + b + 2c)}{4(a + b + c)} - \frac{b}{3} \right)^2 + \left(\frac{c(a + 2b + c)}{4(a + b + c)} - \frac{c}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{b^2(2c - a - b)^2 + c^2(2b - a - c)^2}}{12(a + b + c)}$$

$$\text{พิจารณา } \frac{|\overline{HN}|}{|NG|} = \frac{\frac{\sqrt{b^2(2c-a-b)^2 + c^2(2b-a-c)^2}}{4(a+b+c)}}{\frac{\sqrt{b^2(2c-a-b)^2 + c^2(2b-a-c)^2}}{12(a+b+c)}} = \frac{12(a+b+c)}{4(a+b+c)} = 3$$

$$\text{ดังนั้น } |\overline{HN}| = 3|NG| \quad \dots\dots\dots(18)$$

จากสมการ (17) และสมการ (18) จึงได้ว่า จุด H, G และ N สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ ดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 จุด H, G และ N สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

จากผลการวิจัยสรุปและอภิปรายผลได้ดังนี้

1. จุดเก้าจุดที่สร้างโดยสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ได้แก่ จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และ จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายในทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ มิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael, 2006) กล่าวว่า จุดเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปของภาคตัดกรวย และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ คชินทร์ โกขุนทากรณ์ (2559) ที่ได้ศึกษาวิจัย เรื่อง การใช้พีชคณิตในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด ผลการวิจัยพบว่า จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และ จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายในทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี

2. จุดศูนย์กลางภายใน จดรวม และ จุดศูนย์กลางของวงรี ทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และสอดคล้องสมบัติลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ มิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael, 2006) กล่าวว่าจุดศูนย์กลางภายใน จดรวมและ จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวย สอดคล้องสมบัติของลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ คชินทร์ โกขุนทากรณ์ (2559) ที่ได้ศึกษาวิจัย เรื่อง การใช้พีชคณิตในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด ผลการวิจัยพบว่า จุดศูนย์กลางภายใน จดรวมมวล และ จุดศูนย์กลางของวงรีทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันและสอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งนี้

ในการพิสูจน์นี้ผู้วิจัยใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลัด (The geometer's sketchpad) ในการทำความเข้าใจทฤษฎีก่อนการพิสูจน์ ใช้ในการวาดรูป และใช้พีชคณิตที่เกี่ยวกับ ระยะทาง ระหว่างจุดสองจุด พิกัดของจุดกึ่งกลาง ความชันของเส้นตรง สมการของเส้นตรง วงรี สมการพหุนามกำลังสอง สองตัวแปร การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวย สามเหลี่ยมคล้าย เอกลักษณ์ของ ฟังก์ชันตรีโกณของครึ่งมุม และหลักเกณฑ์คราเมอร์ ในการพิสูจน์ ผู้ที่สนใจจะศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง ดังกล่าว ผู้สนใจอาจดำเนินการวิจัย พิสูจน์ทฤษฎีโดยวิธีอื่นได้อีก ได้แก่ การพิสูจน์โดยเรขาคณิต

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

การพิสูจน์วงรีเก้าจุดในงานวิจัยฉบับนี้ สร้างจุดทั้งเก้าจากกรุปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ซึ่ง สามารถดำเนินการวิจัยต่อไปโดยสร้างจุดทั้งเก้าโดยสามเหลี่ยมใด ๆ

เอกสารอ้างอิง

- คชินทร์ โกขุนทาภรณ์. (2559). การใช้พีชคณิตในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด. *วารสารวิจัยและพัฒนา วไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์*. 11(3), 121-135.
- ศรีบุตร์ แววจริณ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2544). *เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์*. กรุงเทพฯ: วังตะวันออก.
- อำพล ธรรมเจริญ. (2542). *แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1*. กรุงเทพฯ: พิกซ์การพิมพ์.
- MacKay, J. S. (1892). History of the Nine Point Circle. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, (11). 19-61.
- Michael, D. V. (2005). A Generalization of the Nine – point circle and Euler line. *Pythagoras*. 62(December 2005), 31-35.
- Michael, D.V. (2006). The nine- point conic: a rediscovery and proof by computer. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 37(1), 7-14.