

แบบจำลองการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงภายนอกที่ขึ้นอยู่กับเวลา

จุฑามาศ ช้างคำ¹ ปิยรัตน์ มูลศรี² อาทิตย์ หุ้เต็ม^{3*}

Received : May 6, 2022

Revised : August 24, 2022

Accepted : August 29, 2022

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบออสซิลเลตที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวระดับและแนวตั้ง ซึ่งการศึกษาเริ่มจากวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามกฎข้อที่สองของนิวตัน จากนั้นคำนวณหาการกระจัดและความเร็วในแนวระดับและแนวตั้งของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านอากาศและแรงยก และเปรียบเทียบกับกราฟการเพิ่มแรงภายนอกเข้าไปในแนวตั้ง จากนั้นนำผลที่ได้สร้างกราฟด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งผลการวิจัย พบว่ากราฟความเร็วและกราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีแรงภายนอกมากกระทำสูงกว่ากราฟที่ไม่มีแรงภายนอกมากกระทำเมื่อเวลาเท่ากัน และไม่เป็นกราฟพาราโบลาที่สมมาตรตามทฤษฎี

คำสำคัญ: การกระจัด การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ความเร็ว แรงต้านอากาศ แรงภายนอก แรงยก

¹นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิทยาศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

จังหวัดเพชรบูรณ์ อีเมล: namsay110@gmail.com

²อาจารย์ประจำหลักสูตร ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

จังหวัดเพชรบูรณ์ อีเมล: piyarutto@hotmail.com

³อาจารย์ประจำหลักสูตร ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

จังหวัดเพชรบูรณ์ อีเมล: artithutem@pcru.ac.th

* ผู้นิพนธ์หลัก อีเมล: artithutem@pcru.ac.th

MODELLING THE PROJECTILE MOTION UNDER A TIME – DEPENDENT EXTERNAL FORCE

Jutamad Changkham¹ Piyarat Moonsri² Artit Hutem^{3*}**Abstract**

This research aimed to study the motion of oscillating particles as a function of horizontal and vertical time. The study was began by analyzing the equations of motion of particles according to Newton's second law. Then, the horizontal and vertical displacement and velocity of the projectile moving particles as a function of time was calculated under air resistance and lifting force and compared it with adding an external force into the vertical. Then, the results were applied to create a graph with a computer program. The results show that the velocity and vertical displacement graphs are functions of the time when the external force is more applied. A graph with no external forces acting at the same time is not a theoretically symmetrical parabolic graph.

Keyword: Displacement, Projectile motion, Velocity, Air resistance, External force, Lifting force

¹Master of Science Program in Education Science, Phetchabun Rajabhat University, Phetchabun Province, e-mail: namsay110@gmail.com

²Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University, Phetchabun Province, e-mail: piyarutto@hotmail.com

³Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University, Phetchabun Province, e-mail: artithutem@pcru.ac.th

* Corresponding author, e-mail: artithutem@pcru.ac.th

บทนำ

การเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ เป็นหัวข้อหนึ่งในการศึกษารายวิชาฟิสิกส์ ซึ่งเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ที่มีเส้นทางการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง ทำให้วัตถุมีความเร็วสองทิศทาง คือ ความเร็วในแนวระดับ u_x ซึ่งจะมีค่าคงที่ตลอดการเคลื่อนที่ โดยไม่คิดแรงต้านของอากาศหรือแรงภายนอกที่ไม่ใช่แรงโน้มถ่วงของโลกมากระทำกับวัตถุ และความเร็วในแนวตั้ง u_y ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก F_g โดยที่เวลาที่ใช้การเคลื่อนที่จะมีค่าเท่ากันทั้งสองทิศทาง เมื่อให้ x คือ การกระจัดในแนวระดับ y คือ การกระจัดในแนวตั้ง และ t คือ เวลาในการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์สามารถวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้โดยใช้ ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน เพื่อคำนวณหาความเร็วและการกระจัดของอนุภาค เมื่อโยนอนุภาคหนึ่งขึ้นไปในอากาศด้วยความเร็วโดยทำมุม θ กับแนวระดับ ถ้าไม่คิดแรงต้านอากาศ วัตถุนั้นจะเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงเพียงแรงเดียว กราฟเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นรูปพาราโบลาแบบสมมาตร และเมื่อมีแรงต้านอากาศเข้าไป กราฟของการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์จะไม่ใช่พาราโบลาแบบสมมาตร ซึ่งสามารถสร้างกราฟโดยใช้เครื่องมือ Mathematics (Dharma Paudel, 2019) และเมื่อเพิ่มแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเข้าไปในแนวตั้ง

$$F = f_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$$

เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จะมีการสั่นแบบบอสซิเลต (Kuaykaew et. al., 2016) แต่ในสถานการณ์จริง การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์นอกจากจะมีแรงต้านอากาศ F_d ที่มีทิศตรงข้ามกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคแล้ว ยังมีแรงยก F_L ซึ่งมีทิศตั้งฉากกับแรงต้านอากาศมากระทำอีกด้วย (Pouya Jalilian, 2014) ดังนั้นงานวิจัยนี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศและแรงยกในแนวระดับและแนวตั้งจากงานวิจัยของ Dharma (2019) กับ Pouya (2014) และให้มีแรงภายนอกมากระทำ

$$F_y(t) = F_0 t e^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t)$$

คล้ายงานวิจัยของ Kuaykaew (2016) ซึ่งแรงภายนอก $F_y(t)$ ตัวนี้เป็นแรงภายนอกที่มีการสั่นแบบบอสซิเลต ในลักษณะที่บวกเพียงอย่างเดียวซึ่งข้าพเจ้ามองลักษณะการสั่นโมเลกุลในอากาศถ้าเกิดแรงลมเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านแรงลมตัวนี้จะลดกำลังของแรงลม แต่ในงานวิจัยนี้จะมีการเปรียบเทียบกราฟเมื่อเปลี่ยนแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก และสัมพันธ์กับความหน่วงที่ส่งผลต่อเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ซึ่งในงานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาสื่อการเรียนการสอนในรายวิชาฟิสิกส์ทั่วไป ในระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษาเพื่อเป็นการสร้างแบบฝึกหัดให้สำหรับนักศึกษา และสามารถสร้างเป็นแบบจำลองสถานการณ์การเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ด้วยโดยใช้โปรแกรม Mathematica

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านอากาศและแรงยก เมื่อมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลามากระทำในแนวตั้ง และเปรียบเทียบกับเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ในกรณีที่มีแรงโน้มถ่วง

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ได้ออกแบบการดำเนินการวิจัยไว้เป็น 3 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้ 1) คำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาค ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงยก 2) คำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาค

ภายใต้แรงต้านอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในแนวดิ่ง 3) ศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยการนำสมการไปสร้างกราฟ การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของอนุภาคมวล m โดยปราศจากแรงต้านอากาศ F_d และแรงยก F_L อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น v_0 ซึ่งเป็นเนื้อหาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ระดับชั้น ม. 4 จากกฎข้อที่สองของนิวตัน เราจะได้การกระจัดในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t \quad (1)$$

เราพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ในแนวดิ่งจะได้รับความเร็วปลายในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt \quad (2)$$

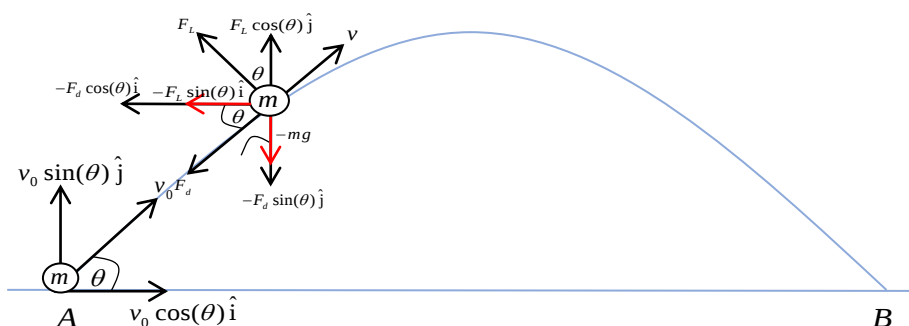
และ

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \left(\frac{1}{2}\right)gt^2 \quad (3)$$

ต่อไปเราจะหาสมการเกี่ยวกับการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับโดยการนำสมการที่ (1) แทนลงในสมการที่ (3) จะได้

$$y(x) = \tan(\theta)x - \left(\frac{1}{2}\right)g\left(x/v_0 \cos(\theta)\right)^2 \quad (4)$$

ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ในแนวระดับและแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านอากาศ F_d และแรงยก F_L ความเร็วต้น v_0 ความเร็วปลาย v ดังนั้นการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จะมีองค์ประกอบในแนวระดับและแนวดิ่ง ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงยก

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-F_L \sin(\theta)\hat{i} - F_d \cos(\theta)\hat{i} + F_L \cos(\theta)\hat{j} - F_d \sin(\theta)\hat{j} - mg\hat{j} = m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}\right) \quad (5)$$

พิจารณาแกน x

$$(-F_L \sin(\theta) - F_d \cos(\theta))\hat{i} = m \frac{dv_x}{dt}\hat{i} \quad (6)$$

กำหนดให้ $F_L = k_L v_x$, $F_d = \alpha v_x$ โดยที่ k_L เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก α เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ และ v_x เป็นความเร็วในแนวระดับ (Jeffrey, 2014)

$$(-k_L v_x \sin(\theta) - \alpha v_x \cos(\theta)) = m \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_x \left(-\frac{k_L}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha}{m} \cos(\theta) \right) = \frac{dv_x}{dt} \quad (7)$$

$$\text{ให้} \quad \delta \equiv \left(\frac{k_L}{m} \sin(\theta) + \frac{\alpha}{m} \cos(\theta) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad & -v_x \delta = \frac{dv_x}{dt} \\ & -\int \delta dt = \int \frac{dv_x}{v_x} \\ & v_x(t) = C e^{-\delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, v_x(0) = v_0 \cos(\theta)$

$$\therefore v_x(t) = v_0 \cos(\theta) e^{-\delta t} \quad (9)$$

จากสมการที่ (9) ความเร็วในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นส่งผลให้ความเร็วในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad v_x &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos(\theta) e^{-\delta t} \\ \int \frac{dx}{dt} dt &= \int v_0 \cos(\theta) e^{-\delta t} dt \\ x(t) &= -\frac{v_0}{\delta} \cos(\theta) e^{-\delta t} + C \end{aligned} \quad (10)$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, x(0) = 0$

$$\therefore x(t) = \frac{v_0}{\delta} \cos(\theta) (1 - e^{-\delta t}) \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) เรียกว่าการกระจัดในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นส่งผลให้การกระจัดในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นแล้วจะคงที่ ณ การกระจัดค่าหนึ่ง

พิจารณาแกน y

$$F_L \cos(\theta) \hat{j} - F_d \sin(\theta) \hat{j} - mg \hat{j} = m \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \quad (12)$$

กำหนดให้ $F_L = k_L v_y, F_d = \alpha v_y$ โดยที่ k_L เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก α เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ และ v_y เป็นความเร็วในแนวตั้ง (Mustafa & Tugce, 2020), (Hutem & Kerdmee, 2013)

$$\begin{aligned} k_L v_y \cos(\theta) - \alpha v_y \sin(\theta) - mg &= m \frac{dv_y}{dt} \\ v_y \left(\frac{k_L}{m} \cos(\theta) - \frac{\alpha}{m} \sin(\theta) \right) - \frac{m}{m} g &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{ให้} \quad \eta \equiv \left(\frac{k_L}{m} \cos(\theta) - \frac{\alpha}{m} \sin(\theta) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad & v_y \eta - g = \frac{dv_y}{dt}, \quad \frac{dv_y}{dt} - \eta v_y = -g \\ & v_y = e^{-\int (-\eta) dt} \left[\int (-g) e^{\int (-\eta) dt} dt + C \right] \\ & \therefore v_y(t) = \left[\frac{g}{\eta} + C e^{\eta t} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, v_y(0) = v_0 \sin(\theta)$

$$\therefore v_y(t) = \left[\frac{g}{\eta} + \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g}{\eta} \right) e^{\eta t} \right] \quad (15)$$

จากสมการที่ (15) ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นส่งผลให้ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m มีค่าลดลง

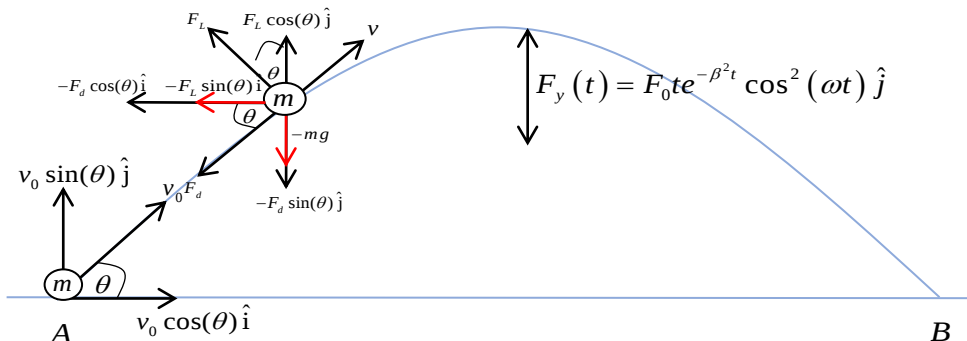
$$\begin{aligned} \text{จาก } v_y &= dy/dt, \quad \frac{dy}{dt} = \left[\frac{g}{\eta} + \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g}{\eta} \right) e^{\eta t} \right] \\ \int dy &= \int \left[\frac{g}{\eta} + \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g}{\eta} \right) e^{\eta t} \right] dt \\ y(t) &= \frac{g}{\eta} t + \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g}{\eta} \right) \frac{e^{\eta t}}{\eta} + C \end{aligned} \quad (16)$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, y(0) = 0$

$$\therefore y(t) = \frac{g}{\eta} t + \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g}{\eta} \right) \left(\frac{e^{\eta t}}{\eta} - \frac{1}{\eta} \right) \quad (17)$$

จากสมการที่ (17) เรียกว่าการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นส่งผลให้การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นแล้วจะมีค่าลดลงลักษณะเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นพาราโบลาว่า

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ในแนวระดับและแนวดิ่ง ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L และแรงภายนอกในแนวดิ่ง $F_y(t) = F_0 t e^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ โดยที่ F_0 คือ แรงเริ่มต้นของแรงภายนอกมีหน่วย N , β คือสัมประสิทธิ์ของความหน่วง ต่อมา ω ความถี่เชิงมุม มีค่า $2\pi f$ และ f คือความถี่ของการสั่นของอนุภาคมวล m มีหน่วย Hz ความเร็วต้น v_0 มีหน่วย m/s ความเร็วปลาย v มีหน่วย m/s ดังนั้นการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์จะมียอดประกอบในแนวระดับและแนวดิ่ง ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ โดยมีแรงภายนอกกระทำในแนวดิ่ง

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-F_L \sin(\theta) \hat{i} - F_d \cos(\theta) \hat{i} + F_L \cos(\theta) \hat{j} - F_d \sin(\theta) \hat{j} - mg \hat{j} + F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j} = m \left(\frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \right)$$

พิจารณาแกน x เราจะได้ความเร็วในแนวระดับ และการกระจัดในแนวระดับเหมือนกับการทดลองขั้นตอนที่ 1 สอดคล้องสมการที่ (5) และสมการที่ (7) (Ebaid, et.al., 2019)

$$\therefore v_x(t) = v_0 \cos(\theta) e^{-\delta t} \quad (18)$$

$$\therefore x(t) = \frac{v_0}{\delta} \cos(\theta) (1 - e^{-\delta t}) \quad (19)$$

พิจารณาแกน y

$$F_L \cos(\theta) \hat{j} - F_d \sin(\theta) \hat{j} - mg \hat{j} + F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j} = m \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \quad (20)$$

กำหนดให้ $F_L = k_L v_y, F_d = \alpha v_y$

$$k_L v_y \cos(\theta) - \alpha v_y \sin(\theta) - mg + F_0 te^{-\beta^2 t} \left(\frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right) = m \frac{dv_y}{dt} \quad (21)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{k_L}{m} v_y \cos(\theta) - \frac{\alpha}{m} v_y \sin(\theta) - g + \frac{F_0}{2m} te^{-\beta^2 t} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$\frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{\alpha}{m} \sin(\theta) - \frac{k_L}{m} \cos(\theta) \right) v_y = \frac{F_0}{2m} te^{-\beta^2 t} (1 + \cos(2\omega t)) - g$$

กำหนดให้ $\eta = \left(\frac{\alpha}{m} \sin(\theta) - \frac{k_L}{m} \cos(\theta) \right)$

$$\frac{dv_y}{dt} + \eta v_y = \frac{F_0}{2m} te^{-\beta^2 t} (1 + \cos^2(2\omega t)) - g \quad (22)$$

$$v_y(t) = e^{-\eta t} \left[\int \left(\frac{F_0}{2m} te^{-\beta^2 t} (1 + \cos^2(2\omega t)) - g \right) e^{\eta t} dt + C \right]; \lambda = \beta^2 - \eta$$

$$v_y(t) = e^{-\eta t} \left[\frac{F_0}{2m} \int te^{-(\beta^2 - \eta)t} (1 + \cos^2(2\omega t)) dt - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + C \right]$$

$$v_y(t) = e^{-\eta t} \left[\frac{F_0}{2m} \int te^{-\lambda t} (1 + \cos^2(2\omega t)) dt - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + C \right]$$

$$v_y(t) = e^{-\eta t} \left[\frac{F_0}{2m} \left\{ \int te^{-\lambda t} dt + \int te^{-\lambda t} \cos^2(2\omega t) dt \right\} - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + C \right] \quad (23)$$

$$\int te^{-\lambda t} dt = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\int te^{-\lambda t} \cos^2(2\omega t) dt$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} (2\omega \sin(2\omega t) - \lambda \cos(2\omega t))}{4\omega^2 + \lambda^2} - \frac{e^{-\lambda t} ((\lambda^2 - 4\omega^2) \cos(2\omega t) - 4\omega \lambda \sin(2\omega t))}{(4\omega^2 + \lambda^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= e^{-\eta t} \left[\frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{e^{-\lambda t} (2\omega \sin(2\omega t) - \lambda \cos(2\omega t))}{\lambda^2 + 4\omega^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{e^{-\lambda t} ((\lambda^2 - 4\omega^2) \cos(2\omega t) - 4\omega \lambda \sin(2\omega t))}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \right\} - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + C \right] \\
v_y(t) &= \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{te^{-\beta^2 t} (2\omega \sin(2\omega t) - \lambda \cos(2\omega t))}{\lambda^2 + 4\omega^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\beta^2 t} ((\lambda^2 - 4\omega^2) \cos(2\omega t) - 4\omega \lambda \sin(2\omega t))}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} - e^{-\beta^2 t} \left(\frac{\lambda t + 1}{\lambda^2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + C
\end{aligned} \tag{24}$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, v_y(0) = v_0 \sin(\theta)$

$$v_0 \sin(\theta) = \frac{F_0}{2m} \left\{ -\frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} - \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} - \frac{g}{\eta} + C \tag{25}$$

$$C = v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\eta} + \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\therefore v_y(t) &= \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{te^{-\beta^2 t} (2\omega \sin(2\omega t) - \lambda \cos(2\omega t))}{\lambda^2 + 4\omega^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-\beta^2 t} ((\lambda^2 - 4\omega^2) \cos(2\omega t) - 4\omega \lambda \sin(2\omega t))}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} - e^{-\beta^2 t} \left(\frac{\lambda t + 1}{\lambda^2} \right) \right\} \\
&\quad - \frac{ge^{\eta t}}{\eta} + v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\eta} + \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{27}$$

จากสมการที่ (27) ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้น ส่งผลให้ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m มีค่าลดลงและการสั่นแบบออสซิลเลตเกิดขึ้นเพราะแรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคมวล m

จาก $v_y = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned}
y(t) = & \frac{F_0 2\omega}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \int te^{-\beta^2 t} \sin(2\omega t) dt - \frac{F_0 \lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \int te^{-\beta^2 t} \cos(2\omega t) dt \\
& - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \int e^{-\beta^2 t} \cos(2\omega t) dt + \frac{F_0 4\omega \lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \int e^{-\beta^2 t} \sin(2\omega t) dt \\
& - \frac{F_0}{2m\lambda} \int te^{-\beta^2 t} dt - \frac{F_0}{2m\lambda^2} \int e^{-\beta^2 t} dt - \frac{gt}{\eta} \\
& - \frac{e^{-\eta t}}{\eta} \left\{ v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\eta} + \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} + C
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
& \int te^{-\beta^2 t} \sin(2\omega t) dt \\
& = \frac{te^{-\beta^2 t}(-\beta^2 \sin(2\omega t) - 2\omega \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\sin(2\omega t) - 4\omega\beta^2 \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \int te^{-\beta^2 t} \cos(2\omega t) dt \\
& = \frac{te^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\cos(2\omega t) - 4\omega\beta^2 \sin(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\int e^{-\beta^2 t} \cos(2\omega t) dt & = \frac{e^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \\
\int e^{-\beta^2 t} \sin(2\omega t) dt & = \frac{e^{-\beta^2 t}(-\beta^2 \sin(2\omega t) - 2\omega \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)}, \quad \int te^{-\beta^2 t} dt = -\frac{e^{-\beta^2 t}}{\beta^2} \left(t + \frac{1}{\beta^2} \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & \frac{2F_0\omega}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \left\{ -\frac{te^{-\beta^2 t}(-\beta^2 \sin(2\omega t) - 2\omega \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\sin(2\omega t) - 4\omega\beta^2 \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \right\} \\
& - \frac{F_0 \lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \left\{ \frac{te^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\cos(2\omega t) - 4\omega\beta^2 \sin(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \right\} \\
& - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right\} \\
& + \frac{4F_0\omega \lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \left\{ -\frac{e^{-\beta^2 t}(\beta^2 \sin(2\omega t) + 2\omega \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)} \right\} \\
& + \frac{F_0 e^{-\beta^2 t}}{2m\lambda\beta^2} \left(t + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{F_0 e^{-\beta^2 t}}{2m\lambda^2\beta^2} - \frac{gt}{\eta} \\
& - \frac{e^{-\eta t}}{\eta} \left\{ v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\eta} + \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} + C
\end{aligned} \tag{32}$$

เงื่อนไขการหา C คือ $t = 0, y(0) = 0$

$$0 = \frac{F_0 \omega}{m(4\omega^2 + \lambda^2)} \left\{ -\frac{(4\omega\beta^2)}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \right\} - \frac{F_0 \lambda}{2m(4\omega^2 + \lambda^2)} \left\{ -\frac{(\beta^4 - 4\omega^2)}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \right\} \\ - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)}{2m(4\omega^2 + \lambda^2)^2} \left\{ \frac{(-\beta^2)}{\beta^4 + 4\omega^2} \right\} + \frac{8F_0\omega^2\lambda}{2m(\omega^2 + \lambda^2)^2} \left\{ \frac{1}{(\beta^4 + 4\omega^2)} \right\} \\ + \frac{F_0}{2m\lambda\beta^4} + \frac{F_0}{2m\lambda^2\beta^2} - \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{\eta} + \frac{g}{\eta^2} + \frac{F_0}{2m\eta} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} + C \quad (33)$$

$$C = \frac{4F_0\omega^2\beta^2}{m(4\omega^2 + \lambda^2)(\beta^4 + 4\omega^2)^2} - \frac{F_0\lambda(\beta^4 - 4\omega^2)}{2m(4\omega^2 + \lambda^2)(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \\ - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)\beta^2}{2m(\beta^4 + 4\omega^2)(4\omega^2 + \lambda^2)^2} - \frac{8F_0\omega^2\lambda}{2m(\beta^4 + 4\omega^2)(\omega^2 + \lambda^2)^2} \\ - \frac{F_0}{2m\lambda\beta^4} - \frac{F_0}{2m\lambda^2\beta^2} + \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{\eta} + \frac{g}{\eta^2} + \frac{F_0}{2m\eta} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} \quad (34)$$

$$\therefore y(t) = \frac{2F_0\omega}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \left\{ -\frac{te^{-\beta^2 t}(\beta^2 \sin(2\omega t) + 2\omega \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right. \\ - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\sin(2\omega t) + 4\omega\beta^2 \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \left. \right\} \\ - \frac{F_0\lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)} \left\{ \frac{te^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right. \\ - \frac{e^{-\beta^2 t}((\beta^4 - 4\omega^2)\cos(2\omega t) - 4\omega\beta^2 \sin(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \left. \right\} \\ - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t}(2\omega \sin(2\omega t) - \beta^2 \cos(2\omega t))}{\beta^4 + 4\omega^2} \right. \\ - \frac{4F_0\omega\lambda}{2m(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} \left\{ \frac{e^{-\beta^2 t}(\beta^2 \sin(2\omega t) + 2\omega \cos(2\omega t))}{(\beta^4 + 4\omega^2)} \right. \\ + \frac{F_0 e^{-\beta^2 t}}{2m\lambda\beta^2} \left(t + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{F_0 e^{-\beta^2 t}}{2m\lambda^2\beta^2} - \frac{gt}{\eta} \\ - \frac{e^{-\eta t}}{\eta} \left\{ v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\eta} + \frac{F_0}{2m} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} \left. \right\} \\ + \frac{4F_0\omega^2\beta^2}{m(4\omega^2 + \lambda^2)(\beta^4 + 4\omega^2)^2} - \frac{F_0\lambda(\beta^4 - 4\omega^2)}{2m(4\omega^2 + \lambda^2)(\beta^4 + 4\omega^2)^2} \\ - \frac{F_0(\lambda^2 - 4\omega^2)\beta^2}{2m(\beta^4 + 4\omega^2)(4\omega^2 + \lambda^2)^2} - \frac{8F_0\omega^2\lambda}{2m(\beta^4 + 4\omega^2)(\omega^2 + \lambda^2)^2} \\ - \frac{F_0}{2m\lambda\beta^4} - \frac{F_0}{2m\lambda^2\beta^2} + \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{\eta} + \frac{g}{\eta^2} + \frac{F_0}{2m\eta} \left\{ \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 + 4\omega^2)^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right\} \right\} \quad (35)$$

จากสมการที่ (35) เรียกว่าการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m ถ้าเวลาการเคลื่อนของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นส่งผลให้การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาคมวล m เพิ่มขึ้นแล้วจะมีค่าลดลงลักษณะเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นพาราโบลาคว่ำและการสั่นแบบฮอสซิเลตเกิดขึ้นเพราะแรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคมวล m ในงานวิจัยนี้ในสมการที่ (27) ได้มีการใช้โปรแกรม Mathematica เช็คำตอบของสมการที่ (22) ตรงกับสมการที่ (27) เป็นสมการความเร็วในแนวดิ่ง

ขั้นตอนที่ 3 ศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยการนำสมการไปสร้างกราฟ ด้วยโปรแกรม Mathematics

ตารางที่ 1 ศึกษาความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลและเบสบอล

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $F_0 = 0.1, f = 1, \beta = 0.1$	ความเร็วในแนวตั้งของลูกฟุตบอล	$v_0 = 20 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.42 \text{ kg}, \theta = 15^\circ, k_L = 0.116,$ $\alpha = 0.211$
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $F_0 = 0.07, f = 1, \beta = 0.08$	ความเร็วในแนวตั้งของลูกเบสบอล	$v_0 = 20 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.1455 \text{ kg}, \theta = 30^\circ, k_L = 0.141,$ $\alpha = 0.417$

ตารางที่ 2 ศึกษาการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลและเบสบอล

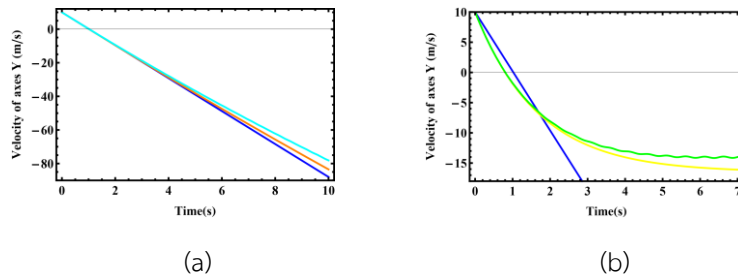
ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $F_0 = 0.65, f = 1, \beta = 0.1$	การกระจัดในแนวตั้งของลูกฟุตบอล	$v_0 = 20 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.42 \text{ kg}, \theta = 45^\circ, k_L = 0.116,$ $\alpha = 0.211$
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $F_0 = 0.65, f = 1, \beta = 0.08$	การกระจัดในแนวตั้งของลูกเบสบอล	$v_0 = 18 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.1455 \text{ kg}, \theta = 45^\circ, k_L = 0.141,$ $\alpha = 0.417$

ตารางที่ 3 ศึกษาการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับ กรณีลูกฟุตบอล

ตัวแปรต้น	ตัวแปรตาม	ตัวแปรควบคุม
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $f = 1, \beta = 0.5,$ $F_0 = 0.65 \text{ N}, 0.95 \text{ N}, 1.35 \text{ N}$	การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับ	$v_0 = 20 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.42 \text{ kg}, \theta = 45^\circ, k_L = 0.116,$ $\alpha = 0.211$
กรณีมีแรงภายนอก $F_y(t) = F_0 te^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t) \hat{j}$ $F_0 = 0.65, f = 1,$ $\beta = 0.1, 0.65, 1.2$	การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับ	$v_0 = 20 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2,$ $m = 0.42 \text{ kg}, \theta = 45^\circ, k_L = 0.116,$ $\alpha = 0.211$

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบออสซิลเลตที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวระดับและแนวตั้ง

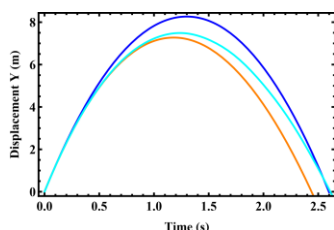


ภาพที่ 3 แสดงความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลและเบสบอล

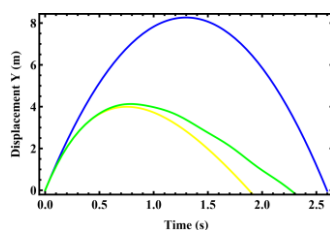
(a) ความเร็วของลูกฟุตบอล (b) ความเร็วลูกเบสบอล

จากภาพที่ 3 (a) เป็นกราฟความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอล โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.116 มวลของลูกฟุตบอล m เท่ากับ 0.42 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α เท่ากับ 0.211 ความเร็วเริ่มต้น v_0 เท่ากับ 20 m/s มุม θ เท่ากับ 15° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความเร็วของอนุภาคมวลลูกฟุตบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L ส่วนเส้นกราฟสีส้มแสดงความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ เส้นกราฟสีฟ้าแสดงความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยมี $F_0 = 0.1$, $f = 1.0$ และ $\beta = 0.1$ จะเห็นว่าเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำส่งผลให้กราฟความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำเส้นสีฟ้าสูงกว่า กราฟความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำเส้นสีส้ม แสดงว่าถ้าเราทำการเพิ่มฟังก์ชันของแรงภายนอกไปจะทำให้ความเร็วในแนวตั้งของอนุภาคมวลลูกฟุตบอลเคลื่อนที่ได้เร็วขึ้น

จากภาพที่ 3 (b) เป็นกราฟความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอล โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.141 มวลของลูกเบสบอล m ค่าเท่ากับ 0.1455 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α ค่าเท่ากับ 0.417 ความเร็วเริ่มต้น v_0 ค่าเท่ากับ 20 m/s มุม θ เท่ากับ 30° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงความเร็วของอนุภาคมวลลูกเบสบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L เส้นกราฟสีเหลืองแสดงความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ เส้นกราฟสีเขียวแสดงความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยมี $F_0 = 0.07$, $f = 1.0$ และ $\beta = 0.08$ จะเห็นว่าเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำส่งผลให้กราฟความเร็วของลูกเบสบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำเส้นสีเขียวมีการสั่น และมีระยะมากกว่ากราฟความเร็วที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำเส้นสีเหลือง เหตุผลที่ข้าพเจ้าใช้มุมการคำนวณการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ต่างกันทั้งสองกรณี เพราะค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศและค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก (Pouya, et.al., 2014) ที่ข้าพเจ้าได้กำหนดนั้นมีค่าต่างกันจึงทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ที่มีความแตกต่างกัน ข้าพเจ้าจึงปรับมุมการยิง (Kantrowitz & Neumann, 2016) ลูกเบสบอลมีความเร็วที่เพิ่มขึ้นและลดลงต่างจากลูกฟุตบอลตรงที่ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกมีค่าไม่เท่ากัน



(a)



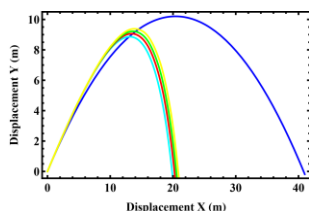
(b)

ภาพที่ 4 แสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลและเบสบอล

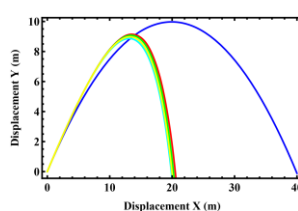
(a) การกระจัดในแนวตั้งของลูกฟุตบอล (b) การกระจัดในแนวตั้งของลูกเบสบอล

จากภาพที่ 4 (a) เป็นกราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอล โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.116 มวลของลูกฟุตบอล m เท่ากับ 0.42 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α เท่ากับ 0.211 ความเร็วเริ่มต้น v_0 เท่ากับ 20 m/s มุม θ เท่ากับ 45° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงการกระจัดของอนุภาคมวลลูกฟุตบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L เส้นกราฟสีส้มแสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ เส้นกราฟสีฟ้าแสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยมี $F_0 = 0.65$, $f = 1.0$ และ $\beta = 0.1$ จะเห็นว่าเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำส่งผลให้มีการกระจัดในแนวตั้งเป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำ กราฟเส้นสีฟ้าสูงกว่า กราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกฟุตบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ กราฟเส้นสีส้ม เมื่อเวลาเท่ากัน

จากภาพที่ 4 (b) เป็นกราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอล โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.141 มวลของลูกเบสบอล m ค่าเท่ากับ 0.1455 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α ค่าเท่ากับ 0.417 ความเร็วเริ่มต้น v_0 ค่าเท่ากับ 18 m/s มุม θ เท่ากับ 45° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงการกระจัดของอนุภาคมวลลูกเบสบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L เส้นกราฟสีเหลืองแสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอลที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ เส้นกราฟสีเขียวแสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอลที่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยมี $F_0 = 0.65$, $f = 1.0$ และ $\beta = 0.08$ จะเห็นว่า เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำส่งผลให้กราฟการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของลูกเบสบอล เส้นสีเขียวมีการสั้นเล็กน้อย และมีระยะมากกว่ากราฟการกระจัดที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำเส้นสีเหลือง เมื่อเวลาเท่ากัน



(a)



(b)

ภาพที่ 5 การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับในกรณีลูกฟุตบอล

(a) การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับในกรณีแรงเริ่มต้นเปลี่ยน

(b) การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับในกรณีสัมประสิทธิ์ความหน่วงเปลี่ยน

จากภาพที่ 5 (a) การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับในกรณีแรงเริ่มต้นเปลี่ยน F_0 โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.116 มวลของลูกฟุตบอล m เท่ากับ 0.42 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α เท่ากับ 0.211 ความเร็วเริ่มต้น v_0 เท่ากับ 20 m/s มุม θ เท่ากับ 45° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 , $f = 1.0 \text{ Hz}$ และ $\beta = 0.5$ เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงการกระจัดของแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวลลูกฟุตบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก F_L การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับโดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำจะแสดงด้วยกราฟ เส้นสีฟ้า เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำโดยให้ $F_0 = 0.55 \text{ N}$, 0.95 N , 1.35 N จะเป็นกราฟเส้นสีแดง สีเขียว และสีเหลือง ตามลำดับ จะเห็นว่า เมื่อเพื่อแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก F_0 จะทำให้การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับมีระยะที่มากขึ้นทั้งในแนวดิ่ง และแนวระดับ การเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ทั้งแบบมี และไม่มีแรงภายนอก ลูกฟุตบอลมีความเร็วลดลง ซึ่งแสดงว่าลูกฟุตบอลจะเคลื่อนที่ขึ้น และขึ้นไปสูงสุดที่เวลาประมาณ 1.5 วินาที หลังจากนั้นลูกฟุตบอลจะเคลื่อนที่ลง และ ใช้เวลานานกว่าตอนขาขึ้น ก่อนจะตกลงพื้น ซึ่งจะทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ไม่เป็นพาราโบลา โดยน่าจะเบี่ยงไปทางขวา

จากภาพที่ 5 (b) การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับในกรณีสัมประสิทธิ์ความหน่วงเปลี่ยน β โดยกำหนดตัวแปรควบคุมได้แก่ สัมประสิทธิ์ของแรงยก k_L มีค่าเท่ากับ 0.116 มวลของลูกฟุตบอล m เท่ากับ 0.42 kg สัมประสิทธิ์ของแรงต้านอากาศ α เท่ากับ 0.211 ความเร็วเริ่มต้น v_0 เท่ากับ 20 m/s มุม θ เท่ากับ 45° ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g มีค่าเท่ากับ 9.8 m/s^2 , $f = 1.0$ และ $F_0 = 0.65$ เส้นกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟแสดงการกระจัดของแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวลลูกฟุตบอลปราศจากแรงต้านอากาศ F_d แรงยก การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำแสดงด้วยกราฟเส้นสีฟ้า เมื่อเปลี่ยนสัมประสิทธิ์ความหน่วง $\beta = 0.1$, 0.65 , 1.2 จะได้กราฟการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับเส้นสีแดง สีเขียว และสีเหลือง ตามลำดับ จะเห็นว่า เมื่อเพิ่มสัมประสิทธิ์ความหน่วงให้ค่ามากขึ้น กราฟการกระจัดจะได้อยู่ระยะที่สั้นลงทั้งในแนวดิ่งและแนวระดับ เมื่อเวลาเท่ากัน

สรุป

การศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์โดยการคำนวณหาการกระจัดและความเร็วในแนวระดับและแนวดิ่ง ภายใต้แรงต้านอากาศ F_d และแรงยก F_L และเปรียบเทียบกับกราฟการเพิ่มแรงภายนอก

$$F_y(t) = F_0 t e^{-\beta^2 t} \cos^2(\omega t)$$

มากระทำในแนวดิ่ง จากการศึกษาพบว่า กราฟความเร็วและกราฟการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่มีแรงภายนอกมากระทำสูงกว่า กราฟที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำเมื่อเวลาเท่ากัน และไม่เป็นกราฟพาราโบลาที่สมมาตรตามทฤษฎี ซึ่งตรงกับงานวิจัยของ Dharma (2019) และเมื่อเพิ่มแรงภายนอกในแนวดิ่ง กราฟมีการสั้นเกิดขึ้นซึ่งตรงกับงานวิจัยของ Kuaykaew (2016) และมีการเปรียบเทียบกราฟเมื่อแรงเริ่มต้นของแรงภายนอก F_0 เปลี่ยน จะทำให้การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดแนวระดับมีระยะที่มากขึ้นทั้งในแนวดิ่งและแนวระดับ เมื่อเวลาเท่ากัน และกำหนดให้สัมประสิทธิ์ความหน่วงเปลี่ยน จะได้ว่าประสิทธิภาพความหน่วงมีค่ามากขึ้น กราฟการกระจัดจะได้อยู่ระยะที่สั้นลงทั้งในแนวดิ่งและแนวระดับ เมื่อเวลาเท่ากัน

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิจัย

1. ควรมีปรับค่าตัวแปรควบคุมให้เหมือนกันทั้งหมด
2. ควรมีการเปรียบเทียบมุมที่เปลี่ยนไปที่ใช้ในการเคลื่อนที่

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการคำนวณหาการกระจัดและความเร็ว ในกรณีเพิ่มแรงภายนอกในแนวระดับ
2. ควรเพิ่มความหลากหลายของชนิดของมวลวัตถุ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- Dharma R. P. (2019). Projectile motion using Mathematica. **International Science Community Association**, 7(3). 7-11.
- Ebaid A., El-Zahar E. R., Aljohani A. F., Salah, B., Krid, M., & Machado, J. T. (2019). Analysis of the two-dimensional fractional projectile motion in view of the experimental data. **Nonlinear Dynamics**, 97, 1711-1720.
- Jeffrey L.L., Donna M. G. Comissiong & Karim R. (2014). Modelling the flight characteristics of a soccer ball. **American Journal of Physics Education**, 8, 4505-1-9
- Hutem A. & Kerdmee S. (2013). Physics Learning Achievement Study: Projectile, using Mathematica program of Faculty of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University Students. **European J of Physics Education**, 4, 22-33.
- Kantrowitz R., & Neumann M. M. (2016). Optimization of Projectile Motion Under Air Resistance Quadratic in Speed. **Mediterranean Journal of Mathematics**, 14(1).
- Mustafa T. & Tugce A. (2020). Exact and approximate solutions to projectile motion in air incorporating Magnus effect. **The European Physical Journal Plus**, 135(7), 566.
- Pouya, J.L., Patrick K., MohammadHady M., & William W. (2014). Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and Volleyball. **American Journal of Sports Science**, 115-121.
- Kuaykaew S., Kerdmee S., Banyenugam P., Moonsri P., & Hutem A. (2016). The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force. **Applied Mechanics and Materials**, Vol. 855, 188-191.