

การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดขึ้นอยู่กับเวลาของอนุภาค ภายใต้แรงต้านทานอากาศ แรงยก และแรงภายนอกในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

จุฑามาศ ช้างคำ¹ ปิยรัตน์ มุลศรี² อาทิตย์ หุ้เต็ม^{3*}

Received : September 19, 2022

Revised : July 3, 2024

Accepted : July 4, 2024

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ในงานวิจัยนี้ศึกษาวิถีทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านทานอากาศ, แรงยก เมื่อมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $\sin^2(\omega_f t)$ มากระทำต่ออนุภาค ในแนวดิ่ง แสดงการคำนวณหาความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวระดับ และในแนวดิ่ง การจัดการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ในแนวระดับ และในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา อนุภาคมีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านทานอากาศ แรงยก และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาและเป็นฟังก์ชัน Sine กำลังสองในแกน s_y โดยการสร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ขึ้นมาโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันและใช้วิธีการอินทิเกรตเพื่อคำนวณหาความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ซึ่งมีการวิเคราะห์ผลการวิจัยเกี่ยวกับวิถีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ซึ่งมีลักษณะไม่สมมาตร และความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะมีค่าแปรผันตรงกับค่าความถี่ และค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ

คำสำคัญ: การกระจัด ความเร็ว โพรเจกไทล์ แรงต้านทานอากาศ แรงยก

¹ นักศึกษาประจำหลักสูตร ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
อีเมล: namsay110@gmail.com

² อาจารย์ประจำหลักสูตร ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
อีเมล: piyarutto@hotmail.com

³ อาจารย์ประจำหลักสูตร ภาควิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์
อีเมล: artithutem@pcru.ac.th

* ผู้นิพนธ์หลัก อีเมล: artithutem@pcru.ac.th

CALCULATION OF TIME-DEPENDENT VELOCITY AND DISPLACEMENT OF A PARTICLE IN PROJECTILE MOTION WITH AIR RESISTANCE, LIFT FORCE, AND EXTERNAL FORCE

Jutamad Changkham¹ Piya-rut Moonsri² Artit Hutem^{3*}

Abstract

This research aimed to study the trajectory of projectile-moving particles of mass m under air resistance force, lifting force, and a vertically acting time-dependent external force $\sin^2(\omega_f t)$ on the particles. The velocity and displacement of a particle in projectile motion were calculated as functions of time, both horizontally and vertically. The particle, with a mass m that moved in projectile motion, is subjected to air resistance, lift force, and a time-dependent external sine square force, causing vertical oscillations. A physics model was constructed based on Newton's second law of motion and was solved using integral methods to determine the velocity and displacement in both horizontal and vertical axes. The time-dependent velocity was found to be directly proportional to the frequency of molecular vibrations of particles and a coefficient of air resistance density.

Keywords: Displacement, Velocity, Projectile, Air resistance force, Lifting force

¹ Master of Science Program in Education Science, Phetchabun Rajabhat University,
e-mail: namsay110@gmail.com

² Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University,
e-mail: piyarutto@hotmail.com

³ Department of Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University,
e-mail: artithutem@pcru.ac.th

* Corresponding author, e-mail: artithutem@pcru.ac.th

บทนำ

การเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ใด ๆ แบบโพรเจกไทล์ (Projectile motion) เป็นการเคลื่อนที่ลอยอยู่ในอากาศภายใต้แรงต้านทานอากาศ และแรงยกโดยมีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบวิถีเส้นโค้งพาราโบลาว่า (Hutem & Kerdmee, 2013) ซึ่งในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ 2 มิติสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ได้ 2 แกน แกนในแนวระดับ (แกน s_x) และแกนในแนวตั้ง (แกน s_y) อนุภาคมวล m ใด ๆ ที่เคลื่อนที่ในอากาศนั้นจะมีแรงยก และแรงต้านทานอากาศเข้ามาเกี่ยวข้องในความเป็นจริงการออกกำลังกายการตีแบดมินตันในโรงเรียนซึ่งเป็นรายวิชาทางพลศึกษานั้นบางครั้งมีแรงลมเข้ามาเกี่ยวข้องกับการตีลูกขนไก่ด้วย ต่อมาในงานวิจัยชิ้นนี้ต้องการคำนวณหาความเร็วในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ของอนุภาคในแนวระดับที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านทานอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชัน $\sin^2(\omega_f t)$ และการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ภายใต้แรงต้านทานอากาศ และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชัน $\sin^2(\omega_f t)$ ซึ่งในงานวิจัยของ Kuaykaew et al. (2016) ได้อธิบายแรงภายนอกที่สั่นในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในการบังคับอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ที่แบบฟังก์ชัน Cosine และในงานวิจัยนี้ได้คำนวณหาการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ ต่อมาในงานวิจัยของ Dharma (2019) ได้คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ใดๆแบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านทานอากาศ และแสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับซึ่งในงานวิจัยนี้ไม่ได้คิดแรงยก และแรงภายนอกที่ขึ้นอยู่กับเวลาแบบการสั่น ต่อมาในงานวิจัยของ จุฑามาต ช่างคำ และคณะ (2565) ได้คำนวณหาความเร็วในแนวระดับ และแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และการกระจัดของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนแบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านทานอากาศ แรงยกและแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชัน Cosine มีการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านทานอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์แรงยกตามการเคลื่อนที่ของลูกฟุตบอล และเบสบอล

ดังนั้น งานวิจัยชิ้นนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะคำนวณความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวระดับ และแนวตั้ง และการกระจัดของการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนแบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านทานอากาศ แรงยก และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาและเป็นฟังก์ชัน $\sin^2(\omega_f t)$ ในแกน s_y โดยการสร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ขึ้นมาโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน และโดยวิธีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาแก้ไขระบบสมการ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

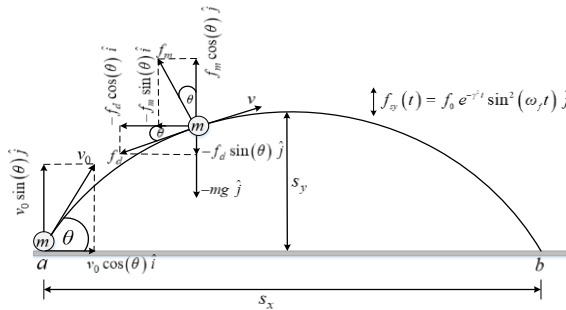
เพื่อศึกษาลักษณะวิถีทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ภายใต้แรงต้านทานอากาศ, แรงยก เมื่อมีแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นฟังก์ชัน $\sin^2(\omega_f t)$ มากระทำในแนวตั้ง แสดงคำนวณหาความเร็วในแนวระดับ และแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา คำนวณหาการกระจัดในแนวระดับกับการกระจัดในแนวตั้งเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เป็นฟังก์ชันของเวลา พร้อมแสดงการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาการกระจัด และความเร็วของอนุภาคมวล m ที่มีลักษณะการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ด้วยความเร็วต้น v_0 เคลื่อนที่จากตำแหน่งจุด a ไปยังตำแหน่งจุด b ที่มีวิธีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งพาราโบลา

คว่ำภายใต้ แรงต้านทานอากาศ (f_d) (Uddin et al., 2021) แรงแยก (f_m) (Mustafa & Tugce, 2020) ซึ่งแรงต้านทานอากาศ และแรงแยก (Jeffrey et al., 2014) มีทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกันเป็นผลจากการเกิดสปินของอนุภาคมวล m และแรงภายนอก (f_{sy}) สามารถใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน เข้ามาแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบเอกพันธ์ และไมเอกพันธ์เพื่อคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดในแนวระดับ และแนวตั้งของอนุภาค

มวล m ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 การเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m โคจรที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ มากระทำในแนวตั้ง (จุฑามาศ ช้างคำ, 2565)

จากภาพที่ 1 นำผลรวมของแรงที่กระทำต่อกับอนุภาคมวล m โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน (Ebaid et al., 2019) ดังนี้

$$-f_m \sin(\theta) \hat{i} - f_d \cos(\theta) \hat{i} + f_m \cos(\theta) \hat{j} - f_d \sin(\theta) \hat{j} - mg \hat{j} + f_0 e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_f t) \hat{j} = m \left(\frac{dv_{sx}}{dt} \hat{i} + \frac{dv_{sy}}{dt} \hat{j} \right) \quad (1)$$

โดยที่ f_0 เป็นแรงภายนอกเริ่มต้น มีหน่วย นิวตัน, ω_f เป็นความถี่เชิงมุม เท่ากับ $2\pi f$ โดยที่ f เป็นค่าความถี่ของการสั่นในระดับโมเลกุลของอนุภาคมวล m ที่สัมผัสกับมวลโมเลกุลของความหนาแน่นอากาศ ในตอนที่อนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ซึ่งมีหน่วย Hz , ต่อมา γ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมีหน่วย $a.u.$, v_{sx} เป็นความเร็วในแนวระดับ มีหน่วย m/s , v_{sy} เป็นความเร็วในแนวตั้ง มีหน่วย m/s , ต่อไปคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวล m ในตามทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ จะได้

$$m \frac{dv_{sx}}{dt} = -f_d \cos(\theta) - f_m \sin(\theta) \quad (2)$$

เรากำหนดให้ $f_d = \alpha_d v_{sx}$ โดยที่ α_d คือค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ (Pouya et al., 2014) และ $f_m = \alpha_m v_{sx}$ โดยที่ α_m คือค่าสัมประสิทธิ์ของแรงแยก (Pouya et al., 2014) จากสมการที่ (2) สามารถจัดรูปสมการได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบเอกพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dv_{sx}}{dt} + \left\{ \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta) \right\} v_{sx} = 0 \quad (3)$$

ซึ่งสมการที่ (3) กำหนดให้ตัวแปร $\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$ แทนลงในสมการที่ (3) และทำการอินทิเกรตแล้วใส่เงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ $v_{sx}(0) = v_0 \cos(\theta)$ เราจะได้ ความเร็วในแนวระดับของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$v_{sx}(t) = v_0 \cos \theta e^{-\mu t} \quad (4)$$

ต่อไปในงานวิจัยนี้คำนวณหาการกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจากนิยาม $v_{sx} = ds_x/dt$ โดยที่ s_x คือการกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวล m เราใช้การอินทิเกรต และเงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้นเป็น $s_x(0) = s_{x0}$ ดังนั้นจะได้การกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{aligned} v_{sx}(t) &= ds_x/dt = v_0 \cos(\theta) e^{-\mu t} \\ s_x(t) &= \frac{v_0}{\mu} \cos(\theta) (1 - e^{-\mu t}) + s_{x0} \end{aligned} \quad (5)$$

โดยสมการที่ (5) จะถูกเรียกว่า การกระจัดในแนวระดับของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก ต่อไปเราสามารถคำนวณหาเวลาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวระดับได้ดังนี้

$$t(s_x) = -\frac{1}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu(s_x - s_{x0})}{v_0 \cos(\theta)} \right) \quad (6)$$

ต่อไป คำนวณหาความเร็ว และการกระจัดของอนุภาคมวล m ในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ในทิศตามแนวแกน y หนึ่งหน่วย j จะได้

$$m \frac{dv_{sy}}{dt} = f_m \cos \theta - f_d \sin(\theta) - mg + f_0 e^{-\gamma^2 t} \sin^2(\omega_f t) \quad (7)$$

เรากำหนดให้ $f_d = \alpha_d v_{sy}$ โดยที่ α_d คือค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และ $f_m = \alpha_m v_{sy}$ โดยที่ α_m คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกจากสมการที่ (7) สามารถจัดรูปสมการได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบไม่เอกพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{dv_{sy}}{dt} + \left\{ \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta) \right\} v_{sy} = -g + \frac{f_0}{m} e^{-\gamma^2 t} \sin^2(\omega_f t) \quad (8)$$

ซึ่งสมการที่ (8) เราจะกำหนดตัวแปร $\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$ แทนกลับไปในสมการที่ (8) จะได้

$$\frac{dv_{sy}}{dt} + \kappa v_{sy} = -g + \frac{f_0}{m} e^{-\gamma^2 t} \sin^2(\omega_f t) \quad (9)$$

ซึ่งสมการที่ (9) จะถูกเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 แบบไม่เอกพันธ์ ต่อไปเราจะหาผลเฉลยของสมการที่ (9) โดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน และใช้เงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้น $v_{sy}(0) = v_0 \sin(\theta)$ จะได้ความเร็วในแนวตั้งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ดังนี้

$$\begin{aligned} v_{sy}(t) &= e^{-\kappa t} \left(\int \left\{ \frac{f_0}{m} e^{-\gamma^2 t} \sin^2(\omega_f t) - g \right\} e^{\kappa t} dt + C \right) \\ v_{sy}(t) &= e^{-\kappa t} \left(\int \frac{f_0}{m} e^{(\kappa - \gamma^2)t} \sin^2(\omega_f t) dt - \frac{g}{\kappa} e^{\kappa t} + C \right) \\ v_{sy}(t) &= e^{-\kappa t} \left(\frac{f_0}{2m} \int e^{(\kappa - \gamma^2)t} (1 - \cos(2\omega_f t)) dt - \frac{g}{\kappa} e^{\kappa t} + C \right) \\ v_{sy}(t) &= e^{-\kappa t} \left(\frac{f_0}{2m} \left[\frac{e^{(\kappa - \gamma^2)t}}{(\kappa - \gamma^2)} - \int e^{(\kappa - \gamma^2)t} \cos(2\omega_f t) dt \right] - \frac{g}{\kappa} e^{\kappa t} + C \right) \end{aligned} \quad (9a)$$

ต่อมาทำการเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนของพจน์ที่สองทางขวาในสมการที่ (9a) ดังนี้

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2} \quad (9b)$$

นำสมการที่ (9b) แทนลงในสมการที่ (9a) และใช้เงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้น $v_{sy}(0) = v_0 \sin(\theta)$ เพื่อคำนวณหาค่า C จะได้ความเร็วในแนวตั้งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนี้

$$v_{sy}(t) = -\frac{f_0}{2m} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2 t} \left((\kappa - \gamma^2) \cos(2\omega_f t) + 2\omega_f \sin(2\omega_f t) \right)}{(\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2} \right\} + \left(v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\kappa} \right) e^{-\kappa t} - \frac{f_0 e^{-\kappa t}}{2m(\kappa - \gamma^2)} + \frac{f_0(\kappa - \gamma^2) e^{-\kappa t}}{2m((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)} - \frac{g}{\kappa} + \frac{f_0 e^{-\gamma^2 t}}{2m(\kappa - \gamma^2)} \quad (10)$$

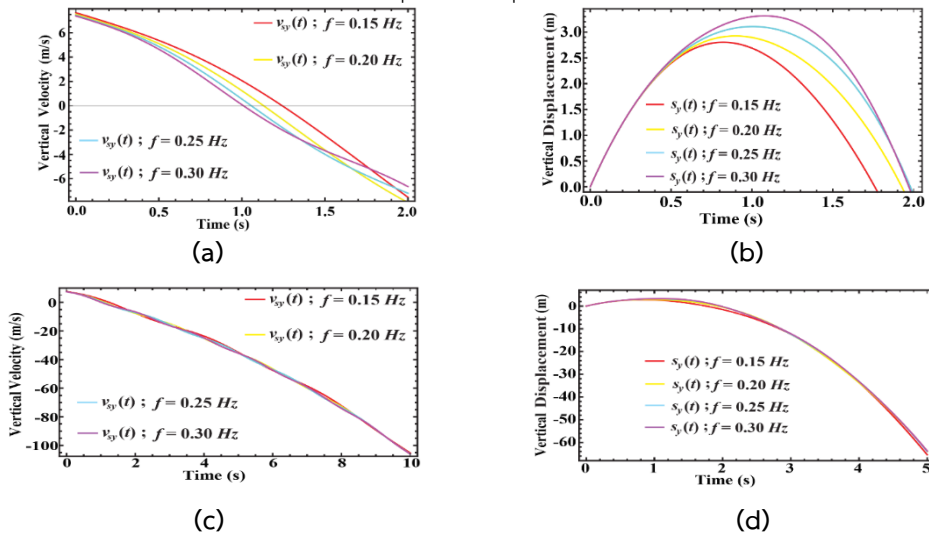
จากสมการที่ (10) สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวตั้งกับเวลา ดังภาพที่ 2 (a) ซึ่งมีค่าของตัวแปรความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ ต่อมาในสมการที่ (10) สามารถนำไปคำนวณหาการกระจัดในแนวตั้งของอนุภาคที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (s_y) ซึ่ง s_y จะขึ้นอยู่กับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก จากนั้น $v_{sy}(t) = ds_y/dt$ โดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนเพื่อคำนวณหาการกระจัดในแนวตั้งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา และใช้เงื่อนไขขอบเขตเริ่มต้นเป็น $s_y(0) = s_{y0}$ จะได้การกระจัดในแนวตั้งของอนุภาคมวล m ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาดังนี้

$$s_y(t) = \frac{f_0 \omega_f}{m} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2 t} (\gamma^2 \sin(2\omega_f t) + 2\omega_f \cos(2\omega_f t))}{((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)(\gamma^4 + 4\omega_f^2)} \right\} - \frac{(f_0(\kappa - \gamma^2)\gamma^2 + f_0 4\omega_f^2)}{2m((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)(\gamma^2 + 4\omega_f^2)} + \frac{f_0(\kappa - \gamma^2)}{2m} \left\{ \frac{e^{-\gamma^2 t} (\gamma^2 \cos(2\omega_f t) - 2\omega_f \sin(2\omega_f t))}{((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)(\gamma^4 + 4\omega_f^2)} \right\} - \frac{g}{\kappa} t - \frac{f_0 e^{-\gamma^2 t}}{2m(\kappa - \gamma^2)\gamma^2} - \left\{ v_0 \sin(\theta) + \frac{g}{\kappa} - \frac{f_0}{2m(\kappa - \gamma^2)} + \frac{f_0(\kappa - \gamma^2)}{2m((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)} \right\} \frac{e^{-\kappa t}}{\kappa} + s_{y0} + \frac{f_0}{2m(\kappa - \gamma^2)\gamma^2} + \left\{ \frac{v_0 \sin(\theta)}{\kappa} + \frac{g}{\kappa^2} - \frac{f_0}{2m\kappa(\kappa - \gamma^2)} + \frac{f_0(\kappa - \gamma^2)}{2m\kappa((\kappa - \gamma^2)^2 + 4\omega_f^2)} \right\} \quad (11)$$

ซึ่งสมการที่ (11) สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดในแนวตั้งกับเวลา ดังภาพที่ 2 (b) ซึ่งมีค่าของตัวแปรความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ จากสมการที่ (11) เรานำสมการที่ (6) เป็นเวลาของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ของอนุภาค $t(s_x)$ แทนลงในสมการที่ (11) จะได้กราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ ซึ่งจะสามารถแสดงเป็นกราฟระหว่าง s_y และ s_x (Bradshaw, 2023) ในหัวข้อผลการวิจัยและอภิปรายผล ดังภาพที่ 4 ภาพที่ 5 และภาพที่ 6

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากสมการที่ (10) ที่ถูกเรียกว่าความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาของอนุภาค ที่เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ภายใต้แรงต้านอากาศ และแรงยก และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่เป็น $\sin^2(\omega_f t)$ ซึ่งแรงภายนอกชนิดนี้เปรียบเสมือนแรงลมที่เกิดมรสุม เช่น พายุดีเปรสชัน เป็นต้น ดังภาพที่ 2(a) และภาพที่ 3 (a)



ภาพที่ 2 (a) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรความเร็วในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ แสดงความเร็วในแนวตั้งในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 2 วินาที

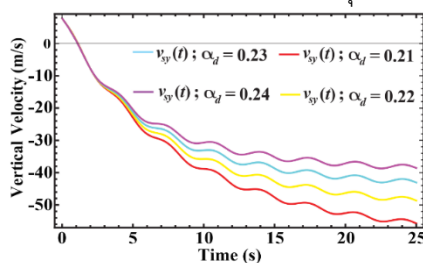
(b) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรการกระจัดในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ แสดงการกระจัดในแนวตั้งในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 2 วินาที

(c) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรความเร็วในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ แสดงความเร็วในแนวตั้งในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 10 วินาที

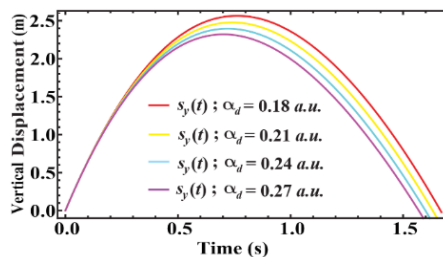
(d) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรการกระจัดในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ แสดงการกระจัดในแนวตั้งในช่วงเวลา 0 วินาที ถึง 10 วินาที

จากภาพที่ 2 (a) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟ ดังนี้ $f_0 = 1.5 \text{ N}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\alpha_m = 0.18 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าความถี่และตัวแปรตามคือ ความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ต่อมาเมื่อค่าของความถี่มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ของอนุภาคมวล m มีค่าการสั่นเพิ่มมากขึ้นเป็นผลมาจากแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ และใช้เวลาการสั่นน้อยลง จากเส้นกราฟสีแดงเปลี่ยนไปเป็นเส้นกราฟสีชมพู ในช่วงเวลา 1.5 ไปถึง 1.0 วินาทีเมื่ออนุภาคมวล m สั่นครบรอบการเคลื่อนที่ที่เป็นผลมาจากแรงภายนอกดังกล่าวไปมีผลกับมวลโมเลกุลของอากาศตรงส่วนตัวแปร α_d และ α_m เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.15 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.20 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีฟ้ามีค่าเป็นกราฟของ

ความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.25 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.30 \text{ Hz}$ ในงานวิจัยชิ้นนี้พิจารณาเวลาในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ณ เวลา 2 วินาทีเพราะการเปลี่ยนแปลงเฟสลูกคลื่นเกิดช่องว่างระหว่างค่าของความเร็วในแนวตั้งที่เป็นผลมาจากการเปลี่ยนแปลงค่าของความถี่ $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ ในแต่ละเส้น ต่อมาจากภาพที่ 2 (b) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุม ดังนี้ $f_0 = 1.5 \text{ N}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\alpha_m = 0.18 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าความถี่ และตัวแปรตาม คือ การกระจัดในแนวตั้งที่ขึ้นอยู่กับเวลา เป็นกราฟระหว่างตัวแปรการกระจัดในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.15 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.20 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.25 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.30 \text{ Hz}$ ถ้าค่าของความถี่เพิ่มขึ้นจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ จะส่งผลให้การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีค่าเพิ่มขึ้นซึ่งจะแปรผันตรง เพราะเป็นผลมาจากแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ ภาพที่ 2 (c) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรความเร็วในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา มีการกำหนดตัวแปรต้นเป็นค่าความถี่ที่เปลี่ยนจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้ได้เพิ่มเวลาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เป็น 10 วินาทีวิธีการเคลื่อนที่ความเร็วในแนวตั้งลักษณะโค้งลง ซึ่งค่าความเร็วในแนวตั้งของอนุภาคมีค่าติดลบเพิ่มขึ้น ค่าของความถี่ที่เปลี่ยนจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ ส่งผลให้ความเร็วในแนวตั้งของอนุภาคมวล m มีการสั่นขึ้นตามแรงภายนอกด้วย ลักษณะของการสั่นเปลี่ยนแปลงช่วงเฟสขึ้นอยู่กับเวลาที่เพิ่มขึ้น จากภาพที่ 2 (d) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรการกระจัดในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา มีการกำหนดตัวแปรต้นเป็นค่าความถี่ที่เปลี่ยนจาก $f = 0.15 \rightarrow 0.30 \text{ Hz}$ ซึ่งในงานวิจัยชิ้นเราได้เพิ่มเวลาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เป็น 10 วินาทีวิธีการเคลื่อนที่การกระจัดในแนวตั้งลักษณะโค้งลง ซึ่งค่าการกระจัดในแนวตั้งของอนุภาคมีค่าติดลบเพิ่มขึ้น



(a)

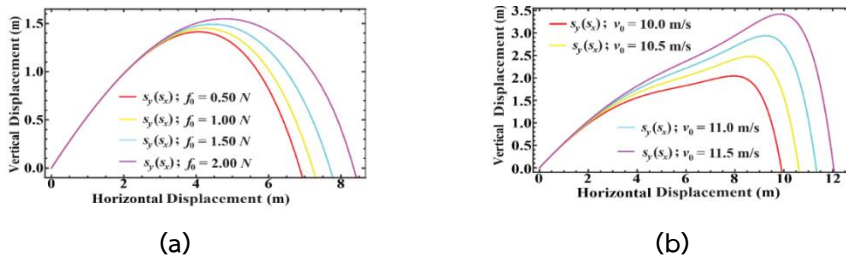


(b)

ภาพที่ 3 (a) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรความเร็วในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเปลี่ยนแปลงจาก $\alpha_d = 0.21 \rightarrow 0.24 \text{ a.u.}$

(b) แสดงกราฟระหว่างตัวแปรการกระจัดในแนวตั้งกับตัวแปรเวลา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเปลี่ยนแปลงจาก $\alpha_d = 0.18 \rightarrow 0.27 \text{ a.u.}$

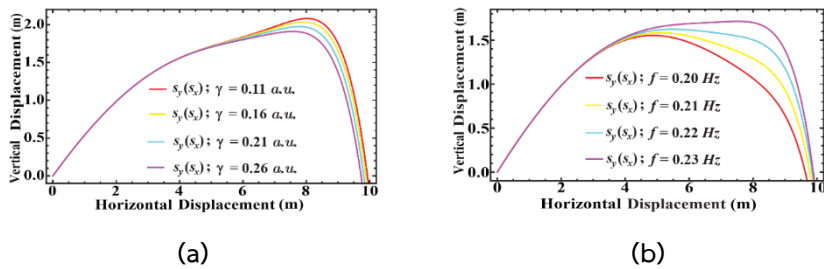
จากภาพที่ 3 (a) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟ ดังนี้ $f_0 = 1.5 \text{ N}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $f = 0.14 \text{ Hz}$, $\alpha_m = 0.15 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$ และ ตัวแปรต้นเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และตัวแปรตามคือ ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.21 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.22 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลเป็นกราฟของความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.23 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.24 \text{ a.u.}$ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าของความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลามากขึ้นเช่นเดียวกัน แปรผกผันตรง ในงานวิจัยนี้พิจารณา ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศมากกว่าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก ($\alpha_d > \alpha_m$) ซึ่งจะทำให้ความเร็วในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีลักษณะการสั่นเกิดขึ้นเป็นผลมาจากแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศที่มีค่าเพิ่มขึ้นส่งผลให้ขนาดของความเร็วในแนวดิ่งที่ติดลบลดลง ณ ช่วงเวลาจาก 5 วินาที เป็นต้นไป ทำให้อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ทิศทางลงช้าลงกว่าอนุภาคมวลนี้จะถึงพื้น จากภาพที่ 3 (a) เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ถึงจุดสูงสุดใช้เวลาประมาณ 2 วินาที จากนั้นเวลาที่ใช้ในการตกให้อยู่ในแนวระดับเดียวกับจุดโยน ประมาณ วินาทีที่ 3 ซึ่งสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศไม่ส่งผลต่อ ความเร็วของวัตถุในแนวดิ่ง แต่ส่งผลต่ออนุภาคเมื่อความเร็วของอนุภาค อยู่ในทิศตั้งลง และมากกว่าความเร็วต้นเนื่องจากงานวิจัยนี้ได้คิดผลของแรงภายนอก $f_0 e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_f t)$ ซึ่งแรงภายนอกดังกล่าวส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ในเทอมของแรงภายนอกมีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง γ ทำให้ความเร็วในแนวดิ่งของอนุภาคเกิดลักษณะการสั่นหน่วง จากภาพที่ 3 (b) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟ ดังนี้ $f_0 = 1.5 \text{ N}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $f = 0.14 \text{ Hz}$, $\alpha_m = 0.15 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$ และ กำหนดตัวแปรต้นเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และตัวแปรตาม คือ การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ต่อมาเส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.21 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.22 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเลเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.23 \text{ a.u.}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.24 \text{ a.u.}$ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาลดลง แปรผกผันกัน ซึ่งในงานวิจัยนี้เราพิจารณา ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศมากกว่าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก ($\alpha_d > \alpha_m$) ซึ่งจะทำให้การกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลามีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นวิถีโค้งแบบพาราโบลาเป็นผลมาจากแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$



ภาพที่ 4 (a) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงจาก $f_0 = 0.50 \rightarrow 2.00 \text{ N}$

(b) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าความเร็วเริ่มต้นเปลี่ยนแปลงจาก $v_0 = 10.0 \rightarrow 11.5 \text{ m/s}$

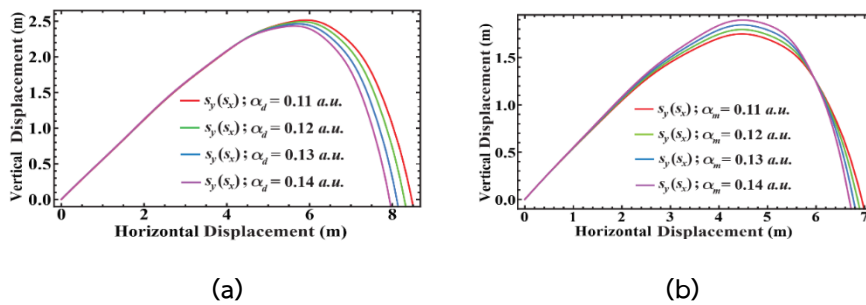
จากภาพที่ 4 (a) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ ดังนี้ $\alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $f = 0.25 \text{ Hz}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าแรงภายนอกเริ่มต้น $f_0 = 0.50 \rightarrow 2.00 \text{ N}$ และตัวแปรตาม คือ การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวราบ จากภาพที่ 4 (a) เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเท่ากับ $f_0 = 0.50 \text{ N}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเท่ากับ $f_0 = 1.00 \text{ N}$ เส้นกราฟสีฟ้าเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเท่ากับ $f_0 = 1.50 \text{ N}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเท่ากับ $f_0 = 2.00 \text{ N}$ ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้การกระจัดในแนวระดับเพิ่มมากขึ้น และการกระจัดในแนวตั้งก็มีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกันลักษณะแปรผันตรงกัน วิธีการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนทางขวา โดยที่แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ เป็นตัวทำลายความสมมาตรของวิธีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ จากภาพที่ 4 (b) ได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ ดังนี้ $\alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $f_0 = 2.0 \text{ N}$, $f = 0.25 \text{ Hz}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าความเร็วเริ่มต้น $v_0 = 10.0 \rightarrow 11.5 \text{ m/s}$ และตัวแปรตามคือ การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวราบ จากภาพที่ 4 (b) เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $v_0 = 10.00$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $v_0 = 10.50$ เส้นกราฟสีฟ้าเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $v_0 = 11.00$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $v_0 = 11.50$ ถ้าค่าความเร็วเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้การกระจัดในแนวระดับเพิ่มมากขึ้น และการกระจัดในแนวตั้งก็มีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกันลักษณะแปรผันตรงกัน วิธีการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนทางขวามากขึ้นลักษณะคล้ายกับการสั่น โดยที่แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ เป็นตัวทำลายความสมมาตรของวิธีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์



ภาพที่ 5 (a) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเปลี่ยนแปลงจาก $\gamma = 0.11 \rightarrow 0.26$ a.u.

(b) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.20 \rightarrow 0.23$ Hz

จากภาพที่ 5 (a) ได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ ดังนี้ $\alpha_m = 0.16$ a.u., $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\alpha_d = 0.14$ a.u., $f_0 = 2.00 \text{ N}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $f = 0.25 \text{ Hz}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง $\gamma = 0.11 \rightarrow 0.26$ a.u. และตัวแปรตาม คือ การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวราบ จากภาพที่ 5 (a) เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ $\gamma = 0.11$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ $\gamma = 0.16$ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ $\gamma = 0.21$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ $\gamma = 0.26$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าการกระจัดในแนวระดับลดลง และการกระจัดในแนวตั้งก็มีค่าลดลงด้วยเช่นกันลักษณะแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง วิธีการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนทางขวา โดยที่แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ เป็นตัวทำลายความสมมาตรของวิธีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ จากภาพที่ 5 (b) ได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟที่แสดงการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ ดังนี้ $\alpha_m = 0.16$ a.u., $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\alpha_d = 0.14$ a.u., $f_0 = 2.00 \text{ N}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma = 0.15$ a.u., $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$ และตัวแปรต้นเป็นค่าความถี่เปลี่ยนแปลงจาก $f = 0.20 \rightarrow 0.23$ Hz และตัวแปรตาม คือ การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวราบ จากภาพที่ 5 (b) เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.20 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีเหลืองเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.21 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีฟ้าอ่อนเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.22 \text{ Hz}$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อค่าความถี่เท่ากับ $f = 0.23 \text{ Hz}$ ถ้าค่าความถี่มีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าการกระจัดในแนวระดับมีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อย และการกระจัดในแนวตั้งก็มีค่าเพิ่มขึ้นมากกว่าค่าการกระจัดในแนวระดับ ซึ่งในลักษณะดังกล่าวแปรผันตรงกับค่าความถี่ วิธีการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนทางขวามีการสั่นของอนุภาคด้วย โดยที่แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $\sin^2(\omega_f t)$ เป็นตัวทำลายความสมมาตรของวิธีการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์



ภาพที่ 6 (a) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเปลี่ยนแปลงจาก $\alpha_d = 0.11 \rightarrow 0.14 \text{ a.u.}$

(b) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาค เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกเปลี่ยนแปลงจาก $\alpha_m = 0.11 \rightarrow 0.14 \text{ a.u.}$

ตารางที่ 1 แสดงค่าของพารามิเตอร์เชิงตัวเลขของ μ, κ ในมุม $\theta = 30^\circ$

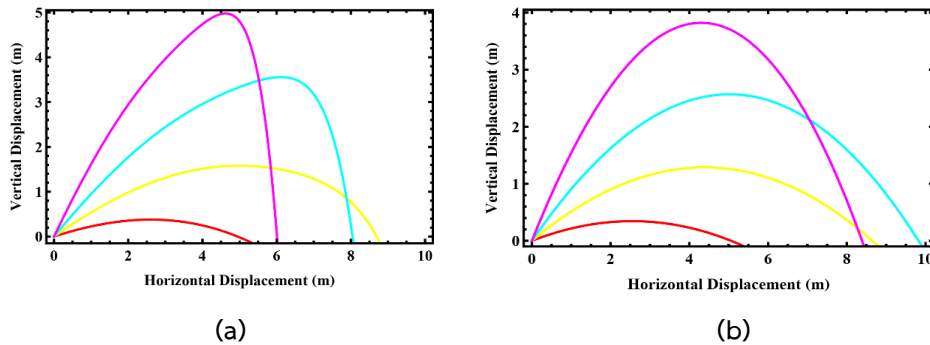
กรณีที่ 1 $\alpha_d < \alpha_m$ $\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$ $\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$ $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.25 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg}, \theta = 30^\circ$ $\mu = 0.8208118551$ $\kappa = -0.4883545032$	กรณีที่ 2 $\alpha_d > \alpha_m$ $\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$ $\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$ $\alpha_d = 0.25 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.14 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg}, \theta = 30^\circ$ $\mu = 0.9550211698$ $\kappa = 0.01252147823$
--	--

จากตารางที่ 1 ในกรณีที่ 1 ถ้านำค่าพารามิเตอร์ μ, κ มาหาผลต่างกันจะได้ 1.3091 โดยประมาณ เมื่อเปรียบเทียบกับในกรณีที่ 2 ค่าหาผลต่างกันจะได้ 0.9424 โดยประมาณ จะเห็นว่าในกรณีที่ 1 มีค่ามากกว่าในกรณีที่ 2 จึงทำให้การกระจัดในแนวระดับมีค่าในภาพที่ 6 (a) มีค่ามากกว่าในภาพที่ 6 (b) ในภาพที่ 6 (b) เกิดการเปลี่ยนเฟสการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เกิดจากการสลับค่าของ $\alpha_d > \alpha_m$ ดังตารางที่ 2

จากภาพที่ 6 (a) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟการเคลื่อนที่โพรเจกไทล์ ดังนี้ $\alpha_m = 0.25 \text{ a.u.}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, f = 1.5 \text{ Hz}, f_0 = 1.80 \text{ N}, v_0 = 10 \text{ m/s}, \gamma = 0.15 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg}, \theta = 30^\circ$ เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.11$ เส้นกราฟสีเขียวเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.12$ เส้นกราฟสีฟ้าเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.13$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเท่ากับ $\alpha_d = 0.14$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศมีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าการกระจัดในแนวระดับมีค่าลดลง และการกระจัดในแนวตั้งก็มี

ค่าลดลง ซึ่งในลักษณะดังกล่าวแปรผกผันกับค่าของความหนาแน่นสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศซึ่งในกรณีนี้ $\alpha_d < \alpha_m$ จากภาพที่ 6 (b) เราได้มีการกำหนดให้มีตัวแปรควบคุมของกราฟการเคลื่อนที่โพเจคไทล์ ดังนี้ $\alpha_d = 0.25 \text{ a.u.}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $f = 1.5 \text{ Hz}$, $f_0 = 1.80 \text{ N}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$ เส้นกราฟสีแดงเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกเท่ากับ $\alpha_m = 0.11$ เส้นกราฟสีเขียวเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกเท่ากับ $\alpha_m = 0.12$ เส้นกราฟสีฟ้าเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกเท่ากับ $\alpha_m = 0.13$ เส้นกราฟสีชมพูเป็นกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับ เมื่อมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกเท่ากับ $\alpha_m = 0.14$ ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกมีค่าเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ค่าการกระจัดในแนวระดับมีค่าลดลง แต่การกระจัดในแนวดิ่งก็มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งในลักษณะดังกล่าวแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกในกรณีนี้ $\alpha_d > \alpha_m$

จากภาพที่ 6 (a) งานวิจัยนี้เราพิจารณา $\alpha_d < \alpha_m$ โดยที่เรากำหนดให้ค่า $\alpha_m = 0.25 \text{ a.u.}$ เป็นตัวแปรควบคุมหลังจากนั้นเราเปลี่ยนแปลงค่า $\alpha_d = 0.11 \rightarrow 0.14 \text{ a.u.}$ จะส่งผลให้ค่าพารามิเตอร์ μ เป็น + และทำให้ $t(s_x)$ เวลาที่อนุภาคเคลื่อนที่แบบโพเจคไทล์ ในสมการที่ 6 มีค่า $\sin(\theta)$ เพิ่มขึ้น แต่ค่าพารามิเตอร์ของ κ เป็นลบ ทำให้เทอมของ $(\alpha_m/m)\cos(\theta)$ เพิ่มขึ้นมาชัดเจนจะส่งผลให้ $S_y(t)$ ในสมการที่ (11) มีเทอมที่เป็น + มากขึ้นจึงทำให้ภาพที่ 6 (a) มีการกระจัดในแนวดิ่ง และการกระจัดในแนวราบมีขนาดมากกว่าการกระจัดในภาพที่ 6 (b) ต่อมาจากภาพที่ 6 (b) งานวิจัยนี้พิจารณา $\alpha_d > \alpha_m$ โดยที่เรากำหนดให้ค่า $\alpha_d = 0.25 \text{ a.u.}$ เป็นตัวแปรควบคุมหลังจากนั้นเราเปลี่ยนแปลงค่า $\alpha_m = 0.11 \rightarrow 0.14 \text{ a.u.}$ จากที่เรากำหนดเงื่อนไข $\alpha_d > \alpha_m$ จะส่งผลให้ค่าพารามิเตอร์ μ มีค่าเป็นบวก และค่าพารามิเตอร์ κ มีค่าเป็นบวก ในเทอมของ $(\alpha_d/m)\sin(\theta)$ จึงส่งผลให้การกระจัดในแนวดิ่ง S_y ในสมการที่ 11 มีเทอมที่มีค่าเป็นบวกน้อยลง ส่งผลให้กราฟการกระจัดของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโพเจคไทล์ในภาพที่ 6 (b) มีขนาดการกระจัด S_y มีค่าน้อยกว่าการกระจัดในภาพที่ 6 (a) และขนาดการกระจัดในแนวราบ S_x มีค่าน้อยกว่าการกระจัดในภาพที่ 6 (a) จากภาพที่ 6 (b) ในช่วงการกระจัด 0 เมตร ถึง 5.8 เมตร เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้การกระจัดในแนวดิ่งมีขนาดเพิ่มขึ้น (อนุภาคเคลื่อนที่ช้าขึ้นไปถึงจุดสูงสุด) แต่พอช่วงการกระจัด 6.0 เมตร ถึง 7.2 เมตรโดยประมาณการเคลื่อนที่ของอนุภาคเกิดการเปลี่ยนเฟสของการเคลื่อนที่ส่งผลให้การกระจัดในแนวราบ S_x มีขนาดลดลง เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกมีค่าเพิ่มขึ้นการเปรียบเทียบมุมการยิงของอนุภาคมวล m ในมุมระหว่าง $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ และ $\theta = 60^\circ$ ในกรณี 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 มีค่าแรงภายนอกเริ่มต้น และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยก ดังนี้ โดยมีตัวแปรควบคุม $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $f = 0.25 \text{ Hz}$, $f_0 = 2.15 \text{ N}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$ ตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงคือมุมการยิงของอนุภาคมวล $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ และ $\theta = 60^\circ$ ส่วนในกรณีที่ 2 คือ มีค่าแรงภายนอกเริ่มต้น และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกน้อย ๆ ดังนี้ โดยมีตัวแปรควบคุม $\alpha_d = 0.01 \text{ a.u.}$, $\alpha_m = 0.015 \text{ a.u.}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $f = 0.25 \text{ Hz}$, $f_0 = 0.01 \text{ N}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $\gamma = 0.15 \text{ a.u.}$, $m = 0.30 \text{ kg}$ ตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงคือมุมการยิงของอนุภาคมวล $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ และ $\theta = 60^\circ$ ดังภาพที่ 7 (a) และ (b)



ภาพที่ 7 (a) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่ามุม θ ต่าง ๆ ดังนี้ เส้นกราฟสีแดง $\theta = 15^\circ$, เส้นกราฟสีเหลือง $\theta = 30^\circ$, เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล $\theta = 45^\circ$, เส้นกราฟสีชมพู $\theta = 60^\circ$ ในกรณีที่มียุทธศาสตร์ภายนอกเริ่มต้นและมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกที่มีค่ามาก

(b) แสดงกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เมื่อมีค่ามุม θ ต่าง ๆ ดังนี้ เส้นกราฟสีแดง $\theta = 15^\circ$, เส้นกราฟสีเหลือง $\theta = 30^\circ$, เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล $\theta = 45^\circ$, เส้นกราฟสีชมพู $\theta = 60^\circ$ ในกรณีที่มียุทธศาสตร์ภายนอกเริ่มต้นและมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ และมีค่าสัมประสิทธิ์ของแรงยกที่มีค่าน้อย

จากภาพที่ 7 (a) เป็นการแสดงกราฟของการกระจัดในแนวดิ่งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับในการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างชนิดของมุม θ การยิงชนิดต่าง ๆ โดยเฉพาะภาพที่ 7 (a) มีค่าตัวแปรควบคุม ดังนี้ $\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}$, $\alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}$, $f_0 = 2.15 \text{ N}$ ซึ่งค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวมีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m และมีค่าตัวพารามิเตอร์ที่เป็นเชิงตัวเลขของพารามิเตอร์ของ μ , κ (Kantrowitz & Neumann, 2017) ในแต่ละมุมต่าง ๆ ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงค่าของพารามิเตอร์เชิงตัวเลขของ μ , κ ในมุม $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 60^\circ$

กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
$\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$	$\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$
$\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$	$\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$
$\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg},$	$\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg},$
$\theta = 15^\circ$	$\theta = 30^\circ$
$\mu = 0.5888022097$	$\mu = 0.6708118551$
$\kappa = -0.3943782196$	$\kappa = -0.2285468820$

ตารางที่ 2 แสดงค่าของพารามิเตอร์เชิงตัวเลขของ μ , κ ในมุม $\theta=15^\circ$, $\theta=30^\circ$, $\theta=45^\circ$, $\theta=60^\circ$ (ต่อ)

กรณีที่ 3	กรณีที่ 4
$\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$	$\mu = \frac{\alpha_d}{m} \cos(\theta) + \frac{\alpha_m}{m} \sin(\theta)$
$\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$	$\kappa = \frac{\alpha_d}{m} \sin(\theta) - \frac{\alpha_m}{m} \cos(\theta)$
$\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg},$ $\theta = 45^\circ$	$\alpha_d = 0.14 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.16 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg},$ $\theta = 60^\circ$
$\mu = 0.7071067812$	$\mu = 0.6952135487$
$\kappa = -0.04714045208$	$\kappa = 0.1374785218$

จากตารางที่ 2 เราสามารถวิเคราะห์ผลการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ ได้ดังภาพที่ 7 (a) เท่านั้น ในภาพที่ 7 (a) มุมการยิงอนุภาค ณ $\theta=30^\circ$ จะทำให้อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดในแนวระดับเพราะเป็นผลมาจากพารามิเตอร์ μ , κ และพารามิเตอร์ของแรงภายนอกเริ่มต้น ด้วย ดังนั้น ในภาพที่ 4 และภาพที่ 5 และภาพที่ 6 คุณลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้ไกลในแนวระดับ การทำงานวิจัยชิ้นนี้พิจารณาแรงต้านอากาศ และแรงยกเพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ภายใต้แรงภายนอกที่มีลักษณะการสั่นมีผลต่อการเคลื่อนที่อนุภาค ถ้าค่าของมุมการยิงเพิ่มมากขึ้นจะทำให้ระยะการกระจัดแนวดิ่งมีค่าเพิ่มมากขึ้น และระยะการกระจัดแนวระดับมีค่าแนวโน้มเพิ่มขึ้น มุมยิงที่ทำให้ได้ระยะการกระจัดมากที่สุด คือ $\theta=30^\circ$ จากภาพที่ 7 (b) ค่าตัวแปรควบคุม $\alpha_d = 0.01 \text{ a.u.}, \alpha_m = 0.015 \text{ a.u.}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, f = 0.25 \text{ Hz}, f_0 = 0.01 \text{ N}, v_0 = 10 \text{ m/s}, \gamma = 0.15 \text{ a.u.}, m = 0.30 \text{ kg}$ มีค่าน้อย ๆ ส่งผลให้อนุภาคมวล m เคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ ได้การกระจัดที่มีลักษณะสอดคล้องตามในแบบเรียนหนังสือ คือ มุมการยิงอนุภาค ณ $\theta=45^\circ$ จะทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ได้ระยะการกระจัดในแนวระดับมีค่ามากที่สุดดังภาพที่ 7 (b) เส้นกราฟสีฟ้าน้ำทะเล และวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ทุกมุมการยิงอนุภาค เกิดความสมมาตร การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ ต่อมาทำการเปรียบเทียบระยะการกระจัดในแนวดิ่งระหว่างภาพที่ 7(a) กับภาพที่ 7(b) ระยะการกระจัดในแนวดิ่งภาพที่ 7(a) มีความสูงมากกว่าระยะการกระจัดในแนวดิ่งภาพที่ 7(b) เป็นผลมาจากการคิดแรงยก และแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา แต่ระยะการกระจัดในแนวระดับของภาพที่ 7(a) มีค่าน้อยกว่าภาพที่ 7(b) เป็นผลมาจากการคิดแรงต้านทานอากาศและแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

สรุป

ความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะมีค่าแปรผันตรงกับค่าความถี่ของการสั่นอนุภาค และค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศส่งผลให้อนุภาคมวล m มีการเคลื่อนที่ทิศทางลงถึงพื้นได้ช้าลง และความเร็วในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาขึ้นอยู่กับแรงภายนอกเริ่มต้น ถ้าค่าแรงภายนอกเริ่มต้นเพิ่มขึ้นส่งผลให้อนุภาคมวล m มีการเคลื่อนที่ทิศทางลงถึงพื้นได้เร็วขึ้น การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของเวลาจะมีค่าแปรผันตรงกับค่าความถี่ แต่แปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศ ต่อมาการกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้านทานอากาศเพิ่มขึ้นส่งผลให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ไปได้ไม่ไกลในแนวระดับ และในแนวตั้ง การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับแปรผันตรงกับค่าแรงภายนอกเริ่มต้น และค่าความเร็วเริ่มต้น และค่าความถี่ของการสั่นอนุภาคด้วย แต่การกระจัดในแนวตั้งที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัดในแนวระดับแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับงานวิจัย

ควรมีการเปรียบเทียบมุมที่เปลี่ยนไปที่ใช้ในการเคลื่อนที่

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

ควรมีการคำนวณหาการกระจัดและความเร็ว ในกรณีเพิ่มแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในแนวระดับ และในแนวตั้งพร้อมกัน

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

จุฬามาศ ช้างคำ, ปิยรัตน์ มูลศรี, และอาทิตย์ หูเต็ม. (2565). แบบจำลองการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ ภายใต้แรงภายนอกที่ขึ้นอยู่กับเวลา. วารสารวิจัยและพัฒนา วไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ สาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 17(2), 45-59.

Bradshaw, J. L. (2023). Projectile motion with quadratic drag. *American Journal of Physics*, 91(4), 258-263.

- Dharma, R. P. (2019). Projectile motion using Mathematica. **International Science Community Association**, 7(3). 7-11.
- Ebaid, A., El-Zahar, E. R., Aljohani, A. F., Salah, B., Krid, M., & Machado, J. T. (2019). Analysis of the two-dimensional fractional projectile motion in view of the experimental data. **Nonlinear Dynamics**, 97, 1711-1720.
- Hutem, A., & Kerdmee, S. (2013). Physics Learning Achievement Study: Projectile, using Mathematica program of Faculty of Science and Technology Phetchabun Rajabhat University Students. **European J of Physics Education**, 4, 22-33.
- Jeffrey, L.L., Donna, M. G. Comissiong & Karim R. (2014). Modelling the flight characteristics of a soccer ball. **American Journal of Physics Education**, 8, 4505.
- Kantrowitz, R., & Neumann, M. M. (2017). Optimization of Projectile Motion Under Air Resistance Quadratic in Speed. **Mediterranean Journal of Mathematics**, 14(1).
- Kuaykaew, S., Kerdmee, S., Banyenugam, P., Moonsri, P., & Hutem, A. (2016). The Analytical Description of Projectile Motion of Cricket Ball in a Linear Resisting Medium the Storm Force. **Applied Mechanics and Materials**, 855, 188-191.
- Mustafa, T., & Tugce, A. (2020). Exact and approximate solutions to projectile motion in air incorporating Magnus effect. **The European Physical Journal Plus**, 135, 566.
- Pouya, J.L., Patrick, K., Mohammad H., M., & William, W. (2014). Computational aerodynamics of baseball, soccer ball and Volleyball. **American Journal of Sports Science**, 115-121.
- Uddin, N., Mostofa, G., & Rana, S. (2021). NUMERICAL ANALYSIS OF DRAG AND LIFT FORCES ACTING ON LONG RANGE PROJECTILES. **International Journal of Academic Research and Reflection**, 9(1), 15-27.