การใช้พีชคณิตในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์[1*]

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการพิสูจน์วงรีเก้าจุด โดยใช้พีชคณิต เพื่อแสดงว่าจุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวลและจุดศูนย์กลางของวงรีเก้าจุด สอดคล้องลักษณะทั่วไปขอ เส้นออยเลอร์ จากการศึกษาพบว่า จุดทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปของวงรีและ จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวลและ จุดศูนย์กลางของวงรีสอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

คำสำคัญ : พีชคณิต วงรี วงรีเก้าจุด

[1] *ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จังหวัดปทุมธานี*

* *ผู้นิพนธ์หลัก e-mail:kachinl@vru.ac.th*

THE USE OF ALGEBRA TO PROOF THE NINE-POINT ELLIPSE

Kachin Kokanotapron [1*]

Abstract

The focus of this paper is to study and present the proof of the nine-point ellipse by using algebra, and to show incenter, centroid and nine-point center which associated with generalization of the Euler line. The result showed that the nine - point all lie on circumference of the ellipse and incenter, centroid and nine-point center associated with generalization of the Euler line

Keywords : algebra, ellipse, nine-point ellipse

[1] Assistant Professor of Program in Applied Mathematics,Faculty of Science and Technology, Valaya Alongkorn Rajabhat University Under The Royal Patronage,

** Corresponding author, e-mail: kachin@vru.ac.th*

บทนำ

การศึกษาจุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปของวงรีได้มีการพัฒนามาจากงานวิจัยและทฤษฎีวงกลมเก้าจุดซึ่งทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ได้มีการศึกษาเริ่มตั้งแต่ปี ค.ศ. 1765 ออยเลอร์ (Euler) เป็นผู้ค้นพบทฤษฎีวงกลมเก้าจุดเป็นคนแรก (Lameon F.,Meyer W.,2002) มีการอ้างอิงถึงการเขียนของ ออยเลอร์ ซึ่งสนับสนุนว่าเป็นบุคคลแรกที่ค้นพบทฤษฎีวงกลมเก้าจุด (Guinand., A.P.,1985) ต่อมาปี ค.ศ. 1820 ไบร์ชอน (Brianchon) และพอนซ์เลท (Poncelet) ได้แสดงว่าจุดกึ่งกลาง 3 จุดของเส้นตรง 3 เส้น ที่เกิดจากจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอดของสามเหลี่ยมอยู่บนเส้นรอบวงกลม (Posamentier, A., 2002) และปี ค.ศ. 1821 วงกลมเก้าจุดได้มีการกล่าวถึงใน รายงานประจำปีคณิตศาสตร์ของ Gergonne ฉบับที่ 11 ในบทความ โดย นักคณิตศาสตร์ ชาวฝรั่งเศส โดย Charles Julien Brianchon และ Victor Poncelet บทความได้กล่าวถึงทฤษฎีสำหรับรูปสามเหลี่ยม จุดกึ่งกลางด้าน เส้นดิ่ง และจุดกึ่งกลางของเส้นร่วมที่ตั้งฉากของรูปสามเหลี่ยมจุดศูนย์กลางที่ตั้งฉากทั้งหมดบนวงกลม นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ Benjamin Bevan จัดไว้ในตำแหน่งเฉพาะคล้ายปัญหา เมื่อ 17 ปีก่อนนี้(Coxeter,H.S.M.,Greitzer, S.L.,1967) (Holzinger,J.,1963) ต่อมา ปี ค.ศ. 1822 ได้มีการประกาศทฤษฎีของ Feuerbachs (Elder,A.E.,1960) (Silvester,J.R.,2001) (Stark J.,1963) (Thebault V.,1949) และ (Weiss, S. ,1972) รวมกับการพิสูจน์ที่ตีพิมพ์ครั้งแรก ปรากฏใน Karl Wilhelm Feuerbach ของ Eigenschaften einiger merwiirdigen punkie des geradlinigen Dreicks การพิสูจน์ที่กล่าวถึง ความสัมพันธ์ของวงกลมเก้าจุด ทฤษฎีพื้นฐานวงกลมเก้าจุดมีการดำเนินการร่วมกันกับส่วนประกอบของเส้นโค้ง แต่ละส่วนของเส้นโค้งที่แสดง ตลอดจนจุดยอดที่แตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยม เช่น จุดยอด จุดกึ่งกลาง และเส้นแบ่งครึ่งของวงกลม (Goldman,J;Berelle,A.,2001) (Hartshorne, R. 2000) (Moise, E Downs, F.,1975) (Reynolds, B. Fenton, W. ,2006) ต่อมาในปี ค.ศ. 1827 เดวิส (T. S. Davies) ได้พิสูจน์คุณสมบัติเฉพาะของ ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และบทแทรกที่ว่าด้วยจุดศูนย์กลางที่อยู่ในตำแหน่งบนเส้นซึ่งอยู่บนจุดตัดกันของส่วนสูงทั้งสามของสามเหลี่ยม บนจุดศูนย์กลางของจุดเก้าจุด และ บนเส้นรอบวงกลม ต่อมาใน ปี ค.ศ. 1828 สไทเนอร์ (Steiner) ได้สร้างคุณสมบัติเฉพาะของทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และต่อมาใน ปี ค.ศ. 1833 ได้แสดงทฤษฎีสิบจุดที่เกี่ยวเนื่องกับสามเหลี่ยมที่อยู่บนวงกลม ปี ค.ศ. 1842 เทอร์เควมซ์ (Terquem) ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดที่สัมผัสกับวงกลมแนบใน และวงกลมแนบนอก ปี ค.ศ. 1850 เมนชัน (J. Mention) ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbachs โดยใช้กระบวนการทางเรขาคณิต เป็นคนแรก ต่อมาปี ค.ศ. 1854 ลีไว (W. H. Levy) ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbachs โดยใช้กระบวนการทางเรขาคณิต ปี ค.ศ. 1855 วิลคินสัน (T. T. Wilkinson) ได้ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ปี ค.ศ. 1857 จอห์น จอซชัว โลบินสัน (John Joshua Robinson) ได้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ปี ค.ศ. 1860 รีเวอร์ จอร์จ แซลเมิน (Reverend George Salmon) ได้เพิ่มเติมทฤษฎีวงกลมเก้าจุดที่เรียกว่า ทฤษฎีของ Feuerbachs (MacKay, J. S.,1892) ปี ค.ศ. 2005 มิเชล ดี วิลเลอร์ ได้เสนอ ภาคตัดกรวยเก้าจุด ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม และจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายใน จะอยู่บนเส้นรอบรูปของภาคตัดกรวย และได้เสนอลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ (Euler line generalization) คือเส้นตรงที่ผ่าน จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และจุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยเก้าจุด และ จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยเก้าจุดแบ่งลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์เป็นอัตราส่วน 1:3 ได้นำเสนอและแสดงการพิสูจน์ในวารสาร Pythagoras (Michael, D.V. , 2005)

ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด จากนักคณิตศาสตร์หลายๆ ท่านซึ่งใช้เรขาคณิต ในการพิสูจน์ และการพิสูจน์เก้าจุดบนภาคตัดกรวยโดยใช้เครื่องคำนวณของ มิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael, D.V. , 2006) ซึ่งเป็นการยากที่จะทำความเข้าใจ ทำให้ผู้สนใจไม่เข้าใจในกระบวนการพิสูจน์ และรูปแบบการพิสูจน์ ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะใช้พีชคณิตเกี่ยวกับการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต เรื่อง ความชันของเส้นตรง สมการเส้นตรง เป็นต้น มาช่วย ในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ ที่ผู้วิจัยสนใจ โดยได้แสดงวิธีการพิสูจน์เป็นขั้นตอน และทำให้ผู้ที่สนใจสามารถเข้าใจขั้นตอนการพิสูจน์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและแสดงการพิสูจน์จุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปวงรีโดยใช้พีชคณิต
2. เพื่อพิสูจน์ว่าจุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวลและ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

วิธีดำเนินการวิจัย

วงรีเก้าจุด คือวงรีซึ่งมีเก้าจุดที่สร้างจากรูปสามเหลี่ยม ได้แก่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม และจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับ จุดศูนย์กลางภายในอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี และ จุดศูนย์กลางภายใน จุดร่วมและ จุดศูนย์กลางของวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ วิธีการดำเนินการวิจัยแบบออกเป็น 4 ขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC บนระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งกำหนดให้ มุม B มีขนาด 37^{o} และมุม C มีขนาด 53^{o} โดยจุด A มีพิกัด $(0,0)$ จุด B มีพิกัด $(4,0)$ และ จุด C มีพิกัด $(0,3)$ ดังภาพที่ 1

ขั้นตอนที่ 2 หาพิกัดจุด D,E และ F ซึ่งเป็นจุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอด C,B และ A ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางภายใน (H) ซึ่งเป็นจุดตัดของ $\overline{BE}$ กับ $\overline{CD}$ หาพิกัดจุด D ซึ่งเกิดจากส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุม C ตัดกับ $\overline{AB}$ พบว่าความยาวของส่วนของเส้นตรง AC คือ 3 หน่วย ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AD คือ x หน่วย

พิจารณา $$\tan\left(\frac{53^{o}}{2}\right) = \frac{x}{3} \qquad \text{...........(1)}$$

พิจารณา $$\tan\left(\frac{53^{o}}{2}\right) = \frac{\sin\left(53^{o}\right)}{1+\cos\left(53^{o}\right)} = \frac{1}{2} \qquad \text{...........(2)}$$

จากสมการ (1) และสมการ (2); $x = \frac{3}{2}$

ดังนั้น พิกัดจุด D คือ $\left(\frac{3}{2},0\right)$ ดังภาพที่ 2

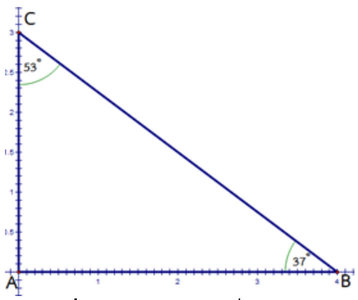
หาพิกัดจุด E ซึ่งเกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุม B ตัดกับ $\overline{AC}$ พบว่าความยาวของส่วนของเส้นตรง AB คือ 4 หน่วย ให้ความยาวของส่วนของเส้นตรง AE คือ y หน่วย

พิจารณา $$\tan\left(\frac{37^o}{2}\right) = \frac{y}{4} \qquad ....(3)$$

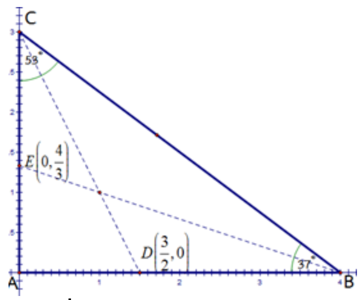
พิจารณา $$\tan\left(\frac{37^o}{2}\right) = \frac{\sin(37^o)}{1+\cos(37^o)} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{3} \qquad ....(4)$$

จากสมการ (3); จึงได้ $$y = \frac{4}{3}$$

ดังนั้น พิกัดจุด E คือ $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 1 แสดงสามเหลี่ยม ABC



ภาพที่ 11 แสดงจุด E และ จุด D

จากภาพที่ 2 ให้ l_1 เป็นเส้นตรงผ่านจุด $B(4,0)$ กับ $E\left(0,\frac{4}{3}\right)$ และ l_2 เป็นเส้นตรงผ่านจุด $C(0,3)$ กับ $D\left(\frac{3}{2},0\right)$ หาจุดศูนย์กลางภายใน (H) ซึ่งเป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของ l_1 กับ l_2

ความชันของเส้นตรง l_1; $$m_{l_1} = \frac{0-\frac{4}{3}}{4-0} = -\frac{1}{3}$$

เส้นตรง l_1 ผ่านจุด $B(4,0)$ มีความชัน $m_{l_1} = -\frac{1}{3}$

สมการเส้นตรง l_1 $$y-0 = -\frac{1}{3}(x-4)$$

$$x+3y = 4$$

จึงได้สมการเส้นตรง l_1 คือ $x+3y = 4$

ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาสมการเส้นตรง l_1 จึงได้สมการเส้นตรง l_2 คือ $2x+y = 3$

พิจารณาจุดตัดของส่วนของเส้นตรง l_1 และเส้นตรง l_2

$$x+3y=4 \qquad \text{............}(5)$$

$$2x+y=3 \qquad \text{............}(6)$$

นำ $2\times$ สมการ(5); $\quad 2x+6y=8 \qquad \text{............}(7)$

นำสมการ $(7)-$ สมการ(6); $\quad y=1$

$$x=1$$

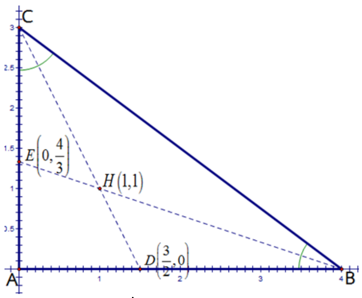
จึงได้จุดตัด$(1,1)$ ดังนั้น พิกัดจุด H คือ $(1,1)$ ดังภาพที่ 3

จากภาพที่ 3 ให้ l_3 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(0,0)$ กับจุด $H(1,1)$ และ l_4 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(4,0)$ กับจุด $C(0,3)$ ผู้วิจัยหาพิกัดจุด F ซึ่งเป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของ l_3 กับ l_4
ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาสมการเส้นตรง l_1 จึงได้

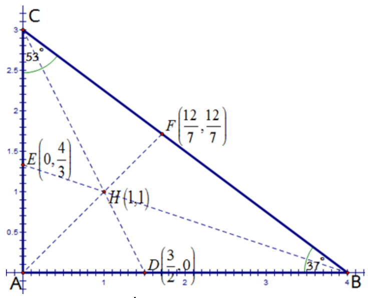
สมการเส้นตรง l_3 คือ $\quad y=x \qquad \text{............}(8)$

และ สมการเส้นตรง l_4 คือ $\quad 3x+4y=12 \qquad \text{............}(9)$

ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาจุดตัดของเส้นตรง l_1 กับ เส้นตรง l_2
จึงได้จุดตัดของเส้นตรงl_3 กับ l_4 คือ $\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$ ดังนั้น พิกัดจุด F คือ $\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$ ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 3 แสดงจุด H



ภาพที่ 4 แสดง จุด F

ขั้นตอนที่ 3 หาพิกัดจุดG, I และ J ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC},\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ
พิกัดจุด G เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $A(0,0)$ กับจุด $C(0,3)$

$$\text{พิกัดจุด } G=\left(\frac{0+0}{2},\frac{3+0}{2}\right)=\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

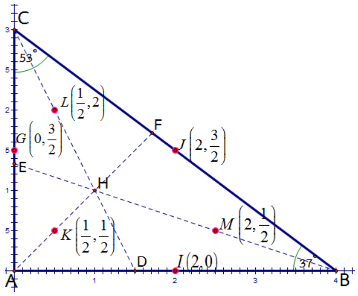
ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาพิกัดจุด G

จึงได้ พิกัดจุด $I=(2,0)$ และพิกัดจุด $J=\left(2,\frac{3}{2}\right)$

หาพิกัดจุด K,L และ M ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AH},\overline{CH}$ และ $\overline{BH}$ ตามลำดับ

ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาพิกัดจุด G

จึงได้ พิกัดจุด $K=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ พิกัดจุด $L=\left(\frac{1}{2},2\right)$ และ พิกัดจุด $M=\left(2,\frac{1}{2}\right)$ แสดงจุด G,I,J,K,L และ M ดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 แสดง G,I,J,K,L และ M

ขั้นตอนที่ 4 หาสมการวงรี จากสมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร

$$Ax^2+Cy^2+Bxy+Dx+Ey+F=0 \text{ เมื่อ } A,B,C,D,E\in R \quad ....(10)$$

นำ $\frac{1}{A}\times$ สมการ (10); $x^2+\frac{C}{A}y^2+\frac{B}{A}xy+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$ ....(11)

ให้ $a_1=\frac{C}{A},b_1=\frac{B}{A},c_1=\frac{D}{A},d_1=\frac{E}{A}$ และ $e_1=\frac{F}{A}$ แทนค่าในสมการ (10)

จึงได้

$$a_1y^2+b_1xy+c_1x+d_1y+e_1=-x^2 \text{ เมื่อ } a_1,b_1,c_1,d_1,e_1\in R \quad ....(12)$$

ให้สมการ (12) ผ่านจุด $D\left(\frac{3}{2},0\right),E\left(0,\frac{4}{3}\right),F\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right),G\left(0,\frac{3}{2}\right)$ และ $I(2,0)$

ผ่านจุด $D\left(\frac{3}{2},0\right)$ $\quad a(0)^2+b\left(\frac{3}{2}\right)(0)+c\left(\frac{3}{2}\right)+d(0)+e=-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\frac{3}{2}c_1+e_1=-\frac{9}{4} \quad ....(13)$$

ผ่านจุด $E\left(0,\frac{4}{3}\right)$ $\quad a\left(\frac{4}{3}\right)^2+b(0)\left(\frac{4}{3}\right)+c(0)+d\left(\frac{4}{3}\right)+e=-(0)^2$

$$\frac{16}{9}a_1+\frac{4}{3}d_1+e_1=0 \quad ....(14)$$

ผ่านจุด $F\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right);$ $a\left(\frac{12}{7}\right)^2+b\left(\frac{12}{7}\right)\left(\frac{12}{7}\right)+c\left(\frac{12}{7}\right)+d\left(\frac{12}{7}\right)+e=-\left(\frac{12}{7}\right)^2$

$$\frac{144}{49}a_1+\frac{144}{49}b_1+\frac{12}{7}c_1+\frac{12}{7}d_1+e_1=-\frac{144}{49} \qquad \text{.............}(15)$$

ผ่านจุด $G\left(0,\frac{3}{2}\right);$ $a\left(\frac{3}{2}\right)^2+b(0)\left(\frac{3}{2}\right)+c(0)+d\left(\frac{3}{2}\right)+e=-(0)^2$

$$\frac{9}{4}a_1+\frac{3}{2}d_1+e_1=0 \qquad \text{.............}(16)$$

ผ่านจุด $I(2,0);$ $a(0)^2+b(2)(0)+c(2)+d(2)+e=-(2)^2$

$$2c_1+e_1=-4 \qquad \text{.............}(17)$$

จากสมการ (13) ถึงสมการ (17) ใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer’s rule) หาค่า a_1,b_1,c_1,d_1 และ e_1

ให้ $$A=\begin{bmatrix}0&0&\frac{3}{2}&0&1\\ \frac{16}{9}&0&0&\frac{4}{3}&1\\ \frac{144}{49}&\frac{144}{49}&\frac{12}{7}&\frac{12}{7}&1\\ \frac{9}{4}&0&0&\frac{3}{2}&1\\ 0&0&2&0&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\\e_1\end{bmatrix} \text{ และ } B=\begin{bmatrix}-\frac{9}{4}\\0\\-\frac{144}{49}\\0\\-4\end{bmatrix} \qquad \text{.............}(18)$$

ได้ระบบสมการ $AX=B$ หาค่า $\det A$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j=2)$

จาก $$\det(A)=\sum_{i=1}^{5}a_{i2}C_{i2}=a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}+a_{42}C_{42}+a_{52}C_{52}$$

$$=(0)C_{12}+(0)C_{22}+\left(\frac{144}{49}\right)C_{32}+(0)C_{42}+(0)C_{52}$$

$$=\frac{144}{49}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&\frac{3}{2}&0&1\\ \frac{16}{9}&0&\frac{4}{3}&1\\ \frac{9}{4}&0&\frac{3}{2}&1\\ 0&2&0&1\end{vmatrix}=\frac{24}{49}$$

ดังนั้น $\det A=\frac{24}{49}$

จากสมการ (18) ให้ $A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{144}{49} & \frac{144}{49} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ หาค่า $\det A_1$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j = 2)$

ทำนองเดียวกับการหาค่า $\det A$

$$\det A_1 = \sum_{i=1}^{5} a_{i2}C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42} + a_{52}C_{52} = \left(-\frac{144}{49}\right)C_{32} = \frac{36}{49}$$

จึงได้ $\det A_1 = \frac{36}{49}$ ดังนั้น $a_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{3}{2}$

จากสมการ (18) ให้ $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \frac{16}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{144}{49} & -\frac{144}{49} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & 1 \\ \frac{9}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ หาค่า $\det A_2$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j = 2)$

ใช้วิธีการทำนองเดียวกับการหา $\det A$ จึงได้ว่า $\det A_2 = \frac{24}{49}$ ดังนั้น $b_1 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1$

จากสมการ (18) ให้ $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 & 1 \\ \frac{16}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{144}{49} & \frac{144}{49} & -\frac{144}{49} & \frac{12}{7} & 1 \\ \frac{9}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ หาค่า $\det(A_3)$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j = 2)$

ใช้วิธีการทำนองเดียวกับการหา $\det A$ จึงได้ว่า $\det A_3 = -\frac{12}{7}$ ดังนั้น $c_1 = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{7}{2}$

จากสมการ (18) ให้ $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 1 \\ \frac{16}{9} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{144}{49} & \frac{144}{49} & \frac{12}{7} & -\frac{144}{49} & 1 \\ \frac{9}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ หาค่า $\det A_4$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j = 2)$

ใช้วิธีการทำนองเดียวกับการหา $\det A$ จึงได้ว่า $\det A_4 = -\frac{102}{49}$ ดังนั้น $d_1 = \frac{\det A_4}{\det A} = -\frac{51}{12}$

จากสมการ (18) ให้ $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{9}{4} \\ \frac{16}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{144}{49} & \frac{144}{49} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{144}{49} \\ \frac{9}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ หาค่า $\det A_5$ โดยกระจายตามหลักที่ 2 $(j = 2)$

ใช้วิธีการทำนองเดียวกับการหา $\det A$ จึงได้ว่า $\det A_5 = \frac{72}{49}$ ดังนั้น $e_1 = \frac{\det A_5}{\det A} = 3$

แทนค่า $a_1 = \frac{3}{2}, b_1 = 1, c_1 = -\frac{7}{2}, d_1 = -\frac{51}{12}$ และ $e = 3$ ในสมการ (12)

จึงได้ $\left(\frac{3}{2}\right)y^2 + (1)xy + \left(-\frac{7}{2}\right)x + \left(-\frac{51}{12}\right)y + (3) = -x^2$

ดังนั้น สมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร คือ

$$12x^2 + 12xy + 18y^2 - 42x - 51y + 36 = 0 \qquad ....(19)$$

ผู้วิจัยตรวจสอบว่าสมการ (19) เป็นสมการวงรีหรือไม่ โดยอาศัยสมบัติการจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย จากสมการพหุนามกำลังสองสองตัวแปร

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นรูปวงรี ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ (ศรีบุตร แววเจริญและ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544)

จากสมการ (19); $12x^2 + 12xy + 18y^2 - 42x - 51y + 36 = 0$

ได้ว่า $A = 12, B = 12$ และ $C = 18$

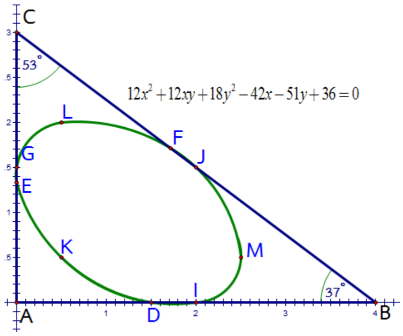
พิจารณา $B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(12)(18) = -720 < 0$

ดังนั้น สมการ (19) เป็นสมการวงรี

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ผลการวิจัยพบว่า

1. พิกัดจุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของมุมทั้งสามคือ $D\left(\frac{3}{2},0\right), E\left(0,\frac{4}{5}\right)$ และ $F\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$ พิกัดจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามคือ $G\left(0,\frac{3}{2}\right), I(2,0)$ และ $J\left(2,\frac{3}{2}\right)$ พิกัดจุดศูนย์กลางภายใน คือ $H(1,1)$ พิกัดจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายในคือ $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), L\left(\frac{1}{2},2\right)$ และ $M\left(2,\frac{1}{2}\right)$ สอดคลองสมการวงรี $12x^2+12xy+18y^2-42x-51y+36=0$ ดังภาพที่ 6



ภาพที่ 6 แสดงจุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปวงรี $12x^2+12xy+18y^2-42x-51y+36=0$

2 ผู้วิจัยจะแสดงจุดศูนย์กลางภายใน (H) จุดรวมมวล (G') และจุดศูนย์กลางวงรี (N) สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

หาจุดศูนย์กลางของวงรี (N) จากสมการทั่วไป $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

ถ้า $B^2-4AC\neq 0$ จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวยคือ

$$h=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \quad \text{และ} \quad k=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$$ (อำพล ธรรมเจริญ,2542)

จากสมการวงรี $12x^2+12xy+18y^2-42x-51y+36=0$

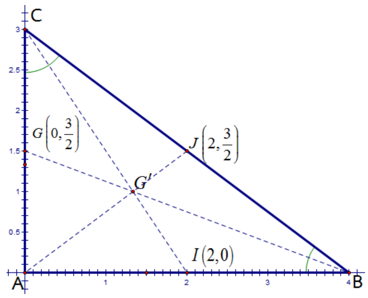
จึงได้ $A=12, B=12, C=18, D=-42, E=-51$

$$h=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}=\frac{2(18)(-42)-12(-51)}{(12)^2-4(12)(18)}=\frac{-900}{-720}=\frac{5}{4}$$

$$k=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=\frac{2(12)(-51)-(12)(-42)}{(12)^2-4(12)(18)}=\frac{-720}{-720}=1$$

จึงได้ $h=\frac{5}{4}$ และ $k=1$ ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรี $N\left(\frac{5}{4},1\right)$

ผู้วิจัยจะหาจุดศูนย์กลางมวล (G')



ภาพที่ 7 แสดงจุดศูนย์กลางมวล (G')

จากภาพที่ 7 ให้ l_5 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(0,3)$ กับจุด $I(2,0)$ และ l_6 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(0,0)$ กับจุด $J\left(2,\frac{3}{2}\right)$ จุดศูนย์กลางมวล (G') เกิดจากกันตัดกันของเส้นตรง l_5 กับเส้นตรง l_6 ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาสมการเส้นตรง l_1 จึงได้

สมการเส้นตรง l_5 คือ $3x+2y=6$

และ สมการเส้นตรง l_6 คือ $3x-4y=0$

ใช้วิธีการหาทำนองเดียวกับการหาจุดตัดของเส้นตรง l_1 กับ เส้นตรง l_2

จึงได้จุดตัดของเส้นตรง l_5 กับ เส้นตรง l_6 คือ $\left(\frac{4}{3},1\right)$ ดังนั้น พิกัดจุด G' คือ $\left(\frac{4}{3},1\right)$

จะแสดงว่าจุด H, G' และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกันโดยการแสดงว่าทุกคู่ของจุดทั้งสามมีความชันเท่ากัน ให้ l_7 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $H(1,1)$ กับจุด $N\left(\frac{5}{4},1\right)$ ความชันของเส้นตรง l_7 คือ $m_{l_7}=0$

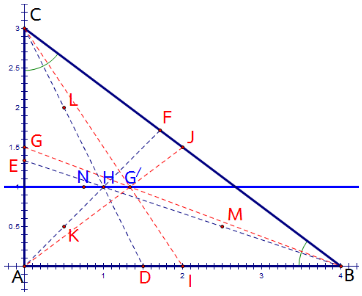
ให้ l_8 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $H(1,1)$ กับจุด $G'\left(\frac{4}{3},1\right)$ ความชันของเส้นตรง l_8 คือ $m_{l_8}=0$

ให้ l_9 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $N\left(\frac{5}{4},1\right)$ กับจุด $G'\left(\frac{4}{3},1\right)$ ความชันของเส้นตรง l_9 คือ $m_{l_9}=0$

จึงได้ว่า $m_{l_7}=m_{l_8}=m_{l_9}=0$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และจุดศูนย์กลางวงรี อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ....(20)

ซึ่งทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรง $y=1$ ดังภาพที่ 8



ภาพที่ 8 แสดงจุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และจุดศูนย์กลางวงรี

จะแสดงว่าจุดศูนย์กลางของวงรีเก้าจุด แบ่งลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์เป็นอัตราส่วน 1:3 $\left(\left|\overline{HN}\right| = 3\left|\overline{NG}\right|\right)$

พิจารณา $\left|\overline{HN}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{5}{4}\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{1}{4}$

และ $\left|\overline{NG'}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{4}-\frac{4}{3}\right)^2 + (1-1)^2} = \frac{1}{12}$

พิจารณา $\dfrac{\left|\overline{HN}\right|}{\left|\overline{NG'}\right|} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{12}{1}\right) = 3$

จึงได้ $\left|\overline{HN}\right| = 3\left|\overline{NG'}\right|$ ....(21)

ดังนั้น จากสมการ (20) และสมการ (21) จึงได้ว่า จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และจุดศูนย์กลางวงรี สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

อภิปรายผลการวิจัย

จากผลการทดลองพบว่า

1. จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของจุดยอดทั้งสาม จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และ จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดศูนย์กลางภายในทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปวงรี ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ มิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael D.V., 2006) กล่าวว่าจุดเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบรูปของภาคตัดกรวย

2. จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และ จุดศูนย์กลางของวงรีทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกันและสอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ มิเชล ดี วิลเลอร์ (Michael D. V., 2006) กล่าวว่าจุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และจุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวย สอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์

สรุป

สรุปผลการวิจัยดังนี้

1 จุดทั้งเก้าจุดคือ จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม จุดปลายของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งมุมของ จุดยอดทั้งสาม และ จุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับ จุดศูนย์กลางภายใน ทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบวงรี

2 จุดศูนย์กลางภายใน จุดรวมมวล และ จุดศูนย์กลางของวงรีทั้งสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จุดศูนย์กลางของวงรีเก้าจุด แบ่งลักษณะทั่วไปของเส้น ออยเลอร์เป็นอัตราส่วน 1:3 ซึ่งสอดคล้องลักษณะทั่วไปของเส้นออยเลอร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ ทฤษฎีวงรีเก้าจุด โดยใช้พีชคณิตในการแสดงการพิสูจน์

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอเกี่ยวกับงานวิจัย ผู้วิจัยใช้พีชคณิตในการพิสูจน์จุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปวงรี และใช้ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต (The geometer’s sketchpad) ในการทำความเข้าใจก่อนการพิสูจน์ และใช้ในการวาดรูป ผู้ที่สนใจต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง ระยะทางระว่างจุดสองจุด พิกัดของจุดกึ่งกลาง ความชันของเส้นตรง สมการของเส้นตรง วงรี สมการพหุนามกำลังสอง การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย จุดศูนย์กลางของภาคตัดกรวย สามเหลี่ยมคล้าย เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณของครึ่งมุม และหลักเกณฑ์คราเมอร์ ในการพิสูจน์จุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปวงรี

ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยครั้งต่อไป การพิสูจน์จุดเก้าจุดบนเส้นรอบรูปวงรีในงานวิจัยฉบับนี้ สร้างจุดทั้งเก้าจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีจุดภายในอีกสองจุดที่มีขนาน 53° และ 37^{o} ซึ่งสามารถดำเนินการวิจัยต่อไปโดย เปลี่ยนมุมภายใน ทั้งสองให้อยู่รูปในรูปมุมใดๆ

กิตติกรรมประกาศ

รายงานการวิจัยเรื่อง การใช้พีชคณิตในการพิสูจน์วงรีเก้าจุด ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รศ ดร.เพียงพบ มนต์นวลปรางค์ รศ. ดร.มานะ ขาวเมฆ ซึ่งได้คำแนะนำและคำปรึกษาที่มีคุณค่าต่องานวิจัย และ อาจารย์ ดร.วิรามศรี ศรีพจนารถ ที่ช่วยตรวจทาน ABSTRACT ขอขอบคุณสำนักวิจัยพัฒนาที่ได้มอบทุนสนับสนุนงานวิจัย (ทุน วจ.) ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัย ปีงบประมาณ 2558

เอกสารอ้างอิง

จิราพร แก้วแก้ว. (2555). จุดตัดบนเส้นตรง OI. งานค้นคว้าอิสระ วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

นิสา ศีรีรมย์. (2555). A Note on the Feuerbach Point. งานค้นคว้าอิสระ วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์ (2550). การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดและทฤษฎีของ Feuerbach. ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์.

ศรีบุตร แววเจริญและชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2544). เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์. กรุงเทพฯ: วงตะวัน จำกัด.

อำพล ธรรมเจริญ. (2542). แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

Coxeter,H.S.M.,Greitzer, S.L. (1967) Geomety Revistrd. Yale University.

Elder, A.E. (1960). Feuerbachs Theorem: A new Proof. The American Mathematical Monthly. Vol. 67, No.9 (November), 905-906.

Goldman, J; Berelle, A. (2001) . Geometry: Contents and Constructions. California: Prentice Hall, Inc.

Guinand., A. P. (1985). Incenters and excircles:Viewed from the Euler Line. Mathematics Magazine. Vol.58,No.2 (March), 89-92.

Hartshorne, R. (2000). Geometry:Euclid and Beyond. New York: Springer Verlag, Inc.

Holzinger, J. (1963). The Problem of the Angle Bisectors. The Mathematics Teacher. Vol.56, No. 5, 321-322.

K. Goganutapon. (2007). Using algebra to proof the nine – point circle theorem. Joint International Conference on Information Communication Technology, In Proceedings of the first JICT 2007, Dec. 19-22, Vientiane , Lao PDR. pp. 6 – 10.

Lameon F., Meyer W. (2002). Euler Lines Concurrent on the Nine-Point Circle. The American Mathematical Monthly. Vol. 108, No.6 (June), 569.

MacKay, J. S. (1892). History of the Nine Point Circle. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (11). 19-61.

Michael, D. V. (2005). A Generalization of the Nine – point circle and Euler line. Pythagoras, Vol. 62 (December 2005): 31 – 35.

Michael, D. V. (2006). The nine- point conic: a rediscovery and proof by computer. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.37, No.1, 2006, 7-14

Moise, E Downs, F. (1975). Geometry. Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Posamentier, A., (2002). Advanced Eucliden Geometry. Emeryville, USA: Key College Publishing.

Reynolds, B. Fenton, W. (2006). College Geometry. California: Key Curriculum Press, Inc.

Silvester, J. R. (2001). Geometry: Ancient & Modern. Oxford: Oxford University Press.

Stark J. (1963) .Analytic proof of the Feuerbach's Theorem. Mathematics Magazine: Vol. 36, No. 2 (March), 122-125.

Thebault V. (1949). On the Feuerbach's point. The American Mathematical Monthly,Vol. 56, No. 8 (October), 546-547.

Weiss, S. (1972). Geometry: Content and Strategy for Teachers. California: Bogden and Quigley Inc.